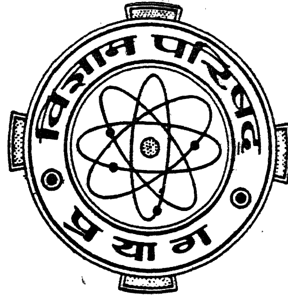
Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 24 January, 1981 No. 1



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 9-22

संशोधित बहुआयामी समाकल रूपान्तरण के मूलभूत गुण

वाई० एन० प्रसाद तथा राजपती

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालॉजी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त – जनवरी 4, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कई सम्मिश्र चरों वाले संशोधित H-फलन का परिचय कंटूर समाकलों के रूप में किया गया है। आगे अष्टि के रूप में इस फलन वाले एक बहुआयामी समाकल रूपान्तरण को परिभाषित करते हुए इसके मूलभूत गुणों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Basic properties of modified multidimensional integral transform. *By* Y. N. Prasad and Raj Pati, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper we have introduced a modified H-function of several complex variables in terms of contour integrals involving Gamma function of mixed signs in the integrand. Further we have defined a multidimensional integral transform involving this function as the kernel of the transform and have studied its basic properties.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में हम एक नवीन समाकल रूपान्तरण को प्रतिष्ठित करेंगे जिसका रूप

$$\phi[f : p_1, ..., p_r]=\int_0^\infty ... \int_0^\infty K(p_1, ..., p_r; x_1, ..., x_r)\, f(x_1, ..., x_r)dx_1 ... dx_r$$

है जहाँ अष्टि $K(p_1, ..., p_r; x_1, ..., x_r)$ घातांकी फलन तथा संशोधित बहुविचरणशील H-फलन का गुणनफल है जिसे प्रसाद तथा सिंह[5] ने श्रीवास्तव तथा पंडा[6], प्रसाद तथा मौर्य[4] के अनुकरण पर परिभाषित किया है। अध्ययनगत समाकल रूपान्तरण से समस्त सुविदित समाकल रूपान्तरण तथा उनके सार्वीकरणों का सार्वीकरण होता है।

बहुआयामी रूपान्तरण की अष्टि के रूप में व्यवहृत संशोधित बहुविचरणशील H-फलन निम्नलिखित रूप में होता है।

$$H^{m,n:\,|p':(M',N');\ldots;(M(r),N(r))}_{p,q:\,|p:[P',Q'];\ldots;[P(r),Q(r)]}\left[\begin{matrix}\{(a_p;\,(\alpha_p{}^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}: \\ \{(b_q;\,(\beta_q{}^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\end{matrix}\right.$$

$$\{e_{|p'};(u^{(i)}{}_{|p'}\,g_{|p'})_{i=1,\ldots,r})\} : \{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ \ldots;\ \{(c^{(r)}{}_{P(r)},\gamma^{(r)}{}_{P(r)})\}$$

$$\{(l_{|p};\,(U_{|p}{}^{(i)}f_{|p}{}^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ \ldots\ \{(d^{(r)}{}_{Q(r)}\delta^{(r)}{}_{Q(r)})\}$$

$$\left.\begin{matrix};\\;\end{matrix}\ x_1,\ldots,x_r.\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L1}\cdots\int_{Lr}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)\,.\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\,.\,x_1{}^{s_1}\ldots x_r{}^{s_r}\,.\,ds_1\ldots ds_r \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}}\Gamma(d_j{}^{(i)}-\delta_j{}^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{N^{(i)}}\Gamma(1-c^{(i)}{}_j+\gamma^{(i)}{}_js_i)}{\prod_{j=M(i)+1}^{Q^{(i)}}\Gamma(1-d^{(i)}{}_j+\delta^{(i)}{}_js_i)\prod_{j=N(i)+1}^{P^{(i)}}\Gamma(c^{(i)}{}_j-\gamma^{(i)}{}_js_i)}$$

$$(i=1,\ldots,r)$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-\sum_{i=1}^{r}\beta_j{}^{(i)}s_i\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+\sum_{i=1}^{r}\alpha_j{}^{(i)}s_i\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+\sum_{i=1}^{r}\beta_j{}^{(i)}s_i\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-\sum_{i=1}^{r}\alpha_j{}^{(i)}s_i\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{|p'}\Gamma\left(e_j+\sum_{i=1}^{r}u_j{}^{(i)}g_j{}^{(i)}s_i\right)}{\prod_{j=1}^{|p}\Gamma\left(l_j+\sum_{i=1}^{r}U_j{}^{(i)}f_j{}^{(i)}s_i\right)}.$$

यहाँ पर तथा आगे भी पादाक्षर के रूप में (i) अनेक डैशों के लिए प्रयुक्त है अर्थात् $b^{(i)}=b'$, $b^{(2)}=b''$ और इसी तरह $w=\sqrt{-1}$,$\{(c_p\cdot\gamma_p)\}$ तथा $\{(a_p,(\alpha_p{}^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}$ क्रमशः p-प्राचलों के समुच्चय $(c_1,\gamma_1),\ldots,(c_p,\gamma_p)$ $(a_1;(\alpha^{(i)})_{1i=1},\ldots,r),\ldots,(a_p,(\alpha^{(i)})_{pi=1,\ldots,r})$ के लिए है, रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है, गुणांक

$\alpha_j{}^{(i)}, j=1,\ldots,p$; $\beta_j{}^{(i)}, j=1,\ldots,q$: $\gamma_j{}^{(i)}, j=1,\ldots,P^{(i)}$; $\delta_j{}^{(i)}, j=1,\ldots,Q^{(i)}$; $g_j{}^{(i)}, j=1,|p'$; $f_j{}^{(i)}, j=1,\ldots,|p$ तथा $i=1,\ldots,r$ धनात्मक संख्यायें हैं तथा m, n, $M^{(i)}$, $N^{(i)}$, $p,q,P^{(i)}$, $Q^{(i)}$

($i=1, ..., r$) पूर्णाङ्क हैं जो $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $0 \leqslant M^{(i)} \leqslant Q^{(i)}$, $0 \leqslant N^{(i)} \leqslant P^{(i)}$, को तुष्ट करते हैं। $i=1, ..., r$, $|p'$ तथा $|p$ अनृण संख्यायें हैं जो $\psi(s_1, ..., s_r)$ के हर तथा अंश में मिश्र चिह्नों वाले Γ-फलनों की संख्या को क्रमशः सूचित करते हैं। सम्मिश्र S_i-तल में कंटूर Γ_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है जो अपने दंतुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक विस्तीर्ण है और यदि आवश्यक हुआ तो

$$\Gamma(d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}s_1)\ j=1, ..., M^{(i)}$$

तथा

$$\Gamma\left(b_j-\sum_{j=1}^{r}\beta_j^{(i)}s_i\right), j=1, ..., m$$

के समस्त पोल L_i के दाहिनी ओर तथा

$$\Gamma(1-c_j^{(i)}+\gamma_j^{(i)}s_i), j=1, ..., N^{(i)}$$

एवं

$$\Gamma\left(1-a_j+\sum_{j=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_i\right), j=1, ..., n$$

के समस्त पोल उसके बायीं ओर पड़ें। यही नहीं

$$\Gamma\left(e_j+\sum_{i=1}^{r}u_j^{(i)}g_j^{(i)}s_i\right)$$

के पोल इसके दाईं ओर या बायीं ओर पड़ते हैं यदि $u_j^{(i)}$ धन या ऋण हो। विभिन्न प्राचल नियन्त्रित हैं जिससे कि ये समस्त पोल सरल हों तथा इनमें से कोई भी संगमी न हो। $x_i=0$, $i=1, ..., r$ बिन्दुओं को सावधानी से निकाल देने पर गुणज समाकल (1·1) परम अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x_i|<\tfrac{1}{2}U_i\pi,\ i=1, ..., r \tag{1.2}$$

जहाँ

$$U_i=\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{(i)}-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(i)}-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{M^{(i)}}\delta_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=M(i)+1}^{Q^{(i)}}\delta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=N(i)+1}^{P^{(i)}}\gamma_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{|p'}g_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{|p}f_j^{(i)}>0,$$

(1.1) में परिभाषित r चरों वाला संशोधित H-फलन $x_1, ..., x_r$ इन r-चरों का वैश्लेषिक फलन होता है यदि

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{P^{(i)}}\gamma_j^{(i)}+\sum_{\substack{j\Sigma\{1, ..., |p'\}\\ \rightarrow \cdot u_j(i)=+1}}g_j^{(i)}+\sum_{\substack{j\Sigma\{1, ..., |p\}\\ \rightarrow \cdot U_j(i)=-1}}f_j^{(i)}$$

$$< \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)} + \sum_{\substack{j\Sigma\{1,\ldots,|p'\} \\ \rightarrow \cdot U_j(i) = -1}} g_j^{(i)} + \sum_{\substack{j\Sigma\{1,\ldots,|p\} \\ \rightarrow \cdot U_j(i) = +1}} f_j^{(i)}$$

$$(i=1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

उपर्युक्त प्रकार के प्रतिवंध सर्वत्र लागू माने जावेंगे और सुविधा के लिये हम संक्षेपण

$$H[(x_1, \ldots, x_r)] = H^{m,n:|p':(M',N');\ldots;(M(r),N(r))}_{p,q:|p:[P',Q'];\ldots;[P(r),Q(r)]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

का प्रयोग करेंगे यदि इससे भ्रम उत्पन्न न हो।

ब्राक्समा[1] का अनुसरण करते हुए यह दिखलाया जा सकता है कि जब $m=0=|p'$

$$H[(x_1, \ldots, x_r)] = 0 \left(\sum_{i=1}^{r} |x_1|^{\alpha_i} \right) \ (x_1, \ldots, x_r) \text{ के लिए}$$

$$(0, \ldots, 0) \text{ के निकट} \tag{1.6(A)}$$

जहाँ

$$\alpha_i = \min Re(d_j^{(i)}/\delta_j^{(i)}) \ (j=1, \ldots, M^{(i)}, i=1, \ldots, r) \tag{1.7}$$

पुनः $n=0=|p'$ के लिए

$$H[(x_1, \ldots, x_r)] = 0 \left(\sum_{i=1}^{r} |x_i|^{\beta_i} \right) \ (x_1, \ldots, x_r) \text{ के लिए}$$

$$(\infty, \ldots, \infty) \text{ के निकट} \tag{1.6(B)}$$

जहाँ

$$\beta_i = \max Re((c_j^{(i)}-1)/\gamma_j^{(i)}), (j=1, \ldots, N^{(i)}, i=1, \ldots, r) \tag{1.8}$$

हमने अपने बहुआयामी समाकल रूपान्तरण को जिसमें संशोधित बहुविचरणशील H-फलन निहित है निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया है

$$\phi[f : p_1, \ldots, p_r] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty K(p_1, \ldots, p_r; x_1, \ldots, x_r) f(x_1, \ldots, x_r) \, dx_1 \ldots dx_r, \tag{1.9}$$

जहाँ रूपान्तर $K(p_1, \ldots, p_r; x_1, \ldots, x_r)$ के अष्टि को

$$K(p_1, \ldots, p_r; x_1, \ldots, x_r) = \sum_{j=1}^{r} (p_j x_j)^{\rho_j - 1} e^{-\sum_{j=1}^{r} l_j p_j x_j}$$

$$H^{0,0:0:(M',N');\dots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q:1p:[P',Q']\dots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}\{(a_p;(\alpha_p^{(i)})_{i=1,\dots,r})\}:\{(c'_{P'},\gamma'_{P'});\dots;\{(c^{(r)}_{P(r)},\gamma^{(r)}_{P(r)}:\\ \{(b_q;(\beta_q^{(i)})_{i=1,\dots,r})\}:\{(l_{|p};(U_{|p}^{(i)}f_{|p}^{(i)})_{i=1,\dots,r})\}:\\ \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\dots;\{(d_{Q(r)}^{(r)},\delta_{Q(r)}^{(r)})\}\end{matrix}\;;\;c_1(p_1x_1)^{\mu_1},\dots,c_r(p_rx_r)^{\mu_r}\;;\right] \tag{1.10}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$\mu_j>0, j=1,\dots,r, |\arg c_jp_j^{\mu_j}|<\tfrac{1}{2}U_j\pi, U_j>0,$$

$$x_1,\dots,x_r\neq0, Re(\rho_j,+\mu_j\alpha_j+\nu_j)>0, Re(\rho_j+\mu_j\beta_j+\nu_j')<0\ (j=1,\dots,r),$$

जहाँ α_j, β_j तथा U_j को क्रमशः (1.7), (1.8) एवं (1.3) द्वारा दिया जाता है।

$$f(x_1,\dots,x_r)=0\,(|x_1|^{v_1}\dots|x_r|^{v_r}),\quad \text{लघु } x_1,\dots,x_r \text{ के लिए}$$

$$=0(|x_1|^{v_1'}\dots|x_r|^{v_r'}).\ \text{वृहत } x_1,\dots,x_r \text{ के लिए}$$

हम $\phi[f: p_1,\dots,p_r]$ को $f(x_1,\dots,x_r)$ के बहुआयामी रूपान्तर के रूप में पुकारेंगे और (1.9) को सांकेतिक रूप में निम्नवत् लिखेंगे :

$$\phi[f:p_1,\dots,p_r]=MT[f(x_1,\dots,x_r)].$$

प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करने पर (1.9) द्वारा परिभाषित रूपान्तर लाप्लास हेंकेल तथा फूरियर के बहुज्ञात रूपान्तरों में समानीत हो जाता है।

2. इस अनुभाग में (1.9) में परिभाषित समाकल रूपान्तरण के मूलभूत गुणों को नौ नियमों के रूप में अध्ययन करेंगे :

(i) **नियम 1** रैखिकता

यदि

$$\phi_t[f:p_1,\dots,p_r]=MT[f_t(x_1,\dots,x_r)],\ (t=1,\dots,m) \tag{2.1}$$

तो

$$\sum_{t=0}^{m} c_t\phi_t[f:p_1,\dots,p_r]=MT\left[\sum_{t=0}^{m} c_t f_t(x_1,\dots,x_r)\right], \tag{2.2}$$

जहाँ $c_t(1\leqslant t\leqslant m)$ समिश्र संख्यायें हैं। जब m सान्त होता है तो फल तुच्छ होता है किन्तु जब m विशेषतः अनन्त होता है तो (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

(a) $$\sum_{t=0}^{\infty} c_t f_t(x_1,\dots,x_r)$$

समान रूप से बद्ध अन्तरालों $0 \leqslant x_i \leqslant h_i (h_i > 0); (i=1, \ldots, r)$, में अभिसारी होता है ।

(b) समाकल

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left| \sum_{j=1}^{r} (p_j x_j)^{\rho_j - 1} e^{-\sum_{j=1}^{r} l_j p_j x_j} \right.$$

$$H^{0,0:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q:|p:[P',Q'];\ldots[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_p; (\alpha_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r}) : \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \ldots; \{(c^{(r)}{}_{(r)}, \gamma^{(r)}{}_{P(r)})\} \\ \{(l_{1p}; (U^{(i)}{}_{1p} f^{(i)}{}_{1p})_{i=1,\ldots,r})\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots; \{(d^{(r)}{}_{Q(r)}, \delta^{(r)}{}_{Q(r)})\} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} ; \\ ; \end{matrix} c_1 (p_1 x_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r (p_r x_r)^{\mu_r} \right] \left. \sum_{t=0}^{\infty} c_t f_t (x_1, \ldots, x_r) \right| \quad dx_1 \ldots dx_r .$$

अभिसारी होता है ।

उदाहरण

प्रथम प्रयास के रूप में माना $f_i(x_1, \ldots, x_r)$ x_1 फलन है अर्थात्

$$f_i(x_1) = \frac{(-1)^i (1+\mu_0)_k x_1^i}{i!\,(k-i)!\,(1+\mu_0)_i}, \; i=1, \ldots, m \qquad (2.3)$$

जहाँ

$$L_k^{\mu_0}(x_1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (1+\mu_0)_k (x_1)^i}{i!\,(k-i)!\,(1+\mu_0)_i} , \qquad (2.4)$$

सार्वीकृत लागेर बहुपद है जो अनृण पूर्णाङ्क k के लिए परिभाषित है ।

$$\phi_i[f : p_1, \ldots, p_r] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} (p_j x_j)^{\rho_j - 1} e^{-\sum_{j=1}^{r} l_j p_j x_j}$$

$$H^{0,0:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q:p:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_p; (\alpha_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \{(c'_p, \gamma'_{p'})\}; \ldots; \{(c_{p(r)}{}^{(r)}, \gamma_{p(r)}{}^{(r)})\} \\ \{(l_{1p}; (U^{(i)}{}_{1p} f^{(i)}{}_{1p})_{i=1,\ldots,r})\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots; \{(d^{(r)}{}_{Q(r)}, \delta^{(r)}{}_{Q(r)})\} \end{matrix}$$

$$; \quad c_1(p_1x_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r(p_rx_r)^{\mu_r} \Bigg] \frac{(-1)^i(1+\mu_0)_k(x_1)^i}{i!\,(k-i)!\,(1+\mu_0)_i}\, dx_1 \ldots dx_r$$

$$= \frac{(-1)^i(1+\mu_0)_k}{i!\,(k-i)!\,(1+\mu_0)_i} \; \frac{(l_1p_1)^{-i}}{\prod_{j=2}^{r} (l_jp_j)^{\rho_j-1}} \; H^{0,0:0:(M',N'+1);\ldots;(M^{(r)},N^{(r)}+1)}_{p,q:|p:[P'+1,Q'];\ldots;[P^{(r)}+1,Q^{(r)}]}$$

$$\Bigg[\begin{matrix}\{(a_p;\, (\alpha_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \\ \{(b_q;\, (\beta^{(i)}{}_q)_{i=1,\ldots,r})\} : \{(l_{|p};\, (U^{(i)}{}_{|p}\, f^{(i)}{}_{|p})_{i=1,\ldots,r})\} :\end{matrix}$$

$$(1-\rho_1-i,\, \mu_1),\, \{(c'_{P'},\, \gamma'_{P'})\};\; (1-\rho_2,\, \mu_2),\, \{c''_{P''},\, \gamma''_{P''};\, \ldots;$$

$$\{(d'_{Q'},\, \delta'_{Q'})\};\; \{(d''_{Q''},\, \delta''_{Q''})\};\, \ldots;$$

$$\begin{matrix}(1-\rho_r,\, \mu_r),\, \{(c^{(r)}{}_{P^{(r)}},\, \gamma^{(r)}{}_{P^{(r)}})\}, \\ \{(d^{(r)}{}_{Q^{(r)}},\, \delta^{(r)}{}_{Q^{(r)}})\}\end{matrix} \quad c_1(1/\rho_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r(1/\rho_r)^{\mu_r} \Bigg], \tag{2.5}$$

बशर्ते $(\mu_j)>0\ (j=1, \ldots, r)$, $Re(\rho_j)>0$,

$$Re(\rho_j+\mu_j\alpha_j+1)>0,\ |\arg c_jp_j^{\mu_j}| < \tfrac{1}{2}U_j\pi,\ U_j>0\,(j=1, \ldots, r),$$

α_j तथा U_j क्रमशः (1.7) तथा (1.3) समीकरणों द्वारा व्यक्त होते हैं।

अतः सान्त दशा में, उपर्युक्त नियम के आधार पर हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} (p_jx_j)^{\rho_j-1}\, e^{-\sum_{j=1}^{r} l_jp_jx_j}\, H^{0,0:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},\, N^{(r)})}_{p,q:|p[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},\, Q^{(r)}]}$$

$$\Bigg[\begin{matrix}\{(a_p;\, (\alpha_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \\ \{(b_q;\, (\beta^{(i)}{}_q(_{i=1,\ldots,r})\} : \{(l_{|p};(U^{(i)}{}_{|p}\, f^{(i)}{}_{|p})_{i=1,\ldots,r})\} :\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\{(c'_{P'},\, \gamma'_{P'});\, \ldots;\, \{c^{(r)}{}_{P^{(r)}},\, \gamma^{(r)}{}_{P^{(r)}})\} : \\ \{(d'_{Q'},\, \delta'_{Q'})\};\, \ldots;\, \{(d^{(r)}{}_{Q^{(r)}},\, \delta^{(r)}{}_{Q^{(r)}})\};\end{matrix} \quad c_1(p_1x_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r(p_rx_r)^{\mu_r} \Bigg]$$

$$\times L_k^{\mu_0}(x_1)dx_1 \ldots dx_r$$

$$=(1+\mu_0)_k \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!\,(k-i)!\,(1+\mu_0)_i} \; \frac{(l_1p_1)^{-i}}{\prod_{j=1}^{r} (l_j)^{\rho_j-1}}$$

$$\times H^{0,0:0:(M',N'+1);\cdots;(M^{(r)},N^{(r)}+1)}_{p,q:|p:[P'+1,Q'];\cdots;[P^{(r)}+1,[Q^{(r)}]}\left[\begin{array}{l}\{(a_p;(\alpha_p{}^{(i)})_{i=1,\cdots,r})\}: \\ \{(b_q;(\beta_q{}^{(i)})_{i=1,\cdots,r})\}:\end{array}\right.$$

$$(1-\rho_1-i,\mu_1),\{c'_{p'},\gamma'_{p'})\};(1-\rho_2,\mu_2),\{c''_{p''},\gamma''_{p''})\};\ldots;$$

$$\{(l_{|p};(U^{(i)}{}_{|p}f^{(i)}{}_{|p})_{i=1,\cdots,r})\}:\{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\{(d''_{Q''},\delta''_{Q''})\};\ldots;$$

$$\left.\begin{array}{l}(1-\rho_r,\mu_r),\{(c_{P(r)}{}^{(r)},\delta_{P(r)}{}^{(r)})\}; \\ \{(d^{(r)}{}_{Q(r)},\delta^{(r)}{}_{Q(r)})\};\end{array} c_1(1/l_1)^{\mu_1},\ldots,c_r(1/l_r)^{\mu_r}\right], \tag{2.6}$$

बशर्ते कि (2.5) में दिये गये प्रतिबन्धों की तुष्टि होती हो।

यदि उपर्युक्त उदाहरण में हम $p=0$ रखें तो फल (2.6) मौर्य[3] के फल में समानीत हो जाता है।

(ii) **नियम 2** समानता

यदि

$$\frac{1}{p_1 \quad p_r}\phi[f:p_1,\ldots,p_r]=MT[f(x_1,\ldots,x_r)], \tag{2.7}$$

तो

$$\frac{1}{p_1\cdots p_r}\phi\left[f:\frac{p_1}{b},\ldots,\frac{p_r}{b_r}\right]$$
$$=MT[f(b_1x_1,\ldots,b_rx_r)], \tag{2.8}$$

जहाँ $b_1,\ldots,b_r$ अनृण संकुल संख्यायें हैं। उपपत्ति सरल है।

(iii) **नियम 3** अनन्त समाकल प्रमेय

यदि

$$\phi[f:p_1,\ldots,p_r]=MT[f(x_1,\ldots,x_r)], \tag{2.9}$$

तो

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} p_j{}^{-k_j}\phi[f:p_1,\ldots,p_r]dp_1\ldots dp_r$$

$$=\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(l_j)^{\rho_j-k_j}}H^{0,0:0:(M',N'+1);\cdots;(M^{(r)},N^{(r)}+1)}_{p,q:\,p:[p'+1,Q'];\cdots;[P^{(r)}+1,Q^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{array}{l}\{(a_p;(\alpha^{(i)}{}_p)_{i=1,\cdots,r})\}: \\ \{(b_q;(\beta^{(i)}{}_{qi=1,\cdots,r})\}:\{(l_{|p};(U^{(i)}{}_{|p}f^{(i)}{}_{|p})_{i=1,\cdots,q})\}:\end{array}\right.$$

$$(1-\rho_1+k_1,\mu_1),\{c'_{p'},\gamma'_{p'})\};\ldots(1-\rho_r+k_r,\mu_r),\{(c^{(r)}{}_{p(r)},\gamma^{(r)}{}_{p(r)})\}$$

$$\{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'}); \ldots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\}$$

$$\left.\begin{matrix} : \\ c_1(1/l_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r(1/l_r)^{\mu_r} \\ ; \end{matrix}\right] \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j{}^{k_j-1}, f(x_1, \ldots, x_r) dx_1 \ldots dx_r \quad (2.10)$$

बशर्ते कि (a) समाकल

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j{}^{k_j-1} \,.\, f(x_1, \ldots, x_r) dx_1 \ldots dx_r$$

तथा

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j{}^{-k_j} \phi[f : p_1, \ldots p_r] \,.\, dx_1 \ldots dx_r$$

पूर्णतया अभिसारी हैं जहाँ

$$(k_1 = \sigma' + i\infty, k_2 = \sigma'' + i\infty, \ldots, k_r = \sigma^{(r)} + i\infty)$$

(b) $f(x_1, \ldots, x_r)$ बिन्दुओं $x_i = t_i$, $t_i > 0$ तथा $i = 1, \ldots, r$ के परिवेश में परिबद्ध विचरण वाला है

(c) $$f(x_1, \ldots, x_r) = \begin{cases} \left(\prod_1^r x_j{}_j{}^{\mu'}\right), Re(\mu_j') > 0, j = 1, \ldots, r, & \text{लघु } x_1, \ldots, x_r \text{ के लिए} \\ \left(e^{-\sum_{j=1}^{r} v_j' x_j}\right), Re(v_j') > 0, j = 1, \ldots, r, & \text{बृहद } x_1, \ldots, x_r \text{ के लिए} \end{cases}$$

(d) $Re(\rho_j - k_j + \mu_j) > 0$, $Re(\rho_j - k_j + \mu_j \beta_j) < 0$,

$$|\arg c_j p_j{}^{\mu_j}| < \tfrac{1}{2} U_j \pi, \; U_j > 0, j = 1, \ldots, r,$$

जहाँ U_j, α_j तथा β_j क्रमशः (1.3), (1.7) तथा (1.8) समीकरणों द्वारा व्यक्त हैं।

उपपत्ति :

(2.9) के दोनों पक्षों को

$$\prod_{j=1}^{r} p_j{}^{-k_j} (j = 1, \ldots, r)$$

से गुणा करने एवं 0 तथा ∞ सीमाओं के बीच $p_1, \ldots, p_r$ के प्रति समाकलित करने, परिबन्धित बहु-विचरणशील H-फलन को उसके कंटूर रूप में तोड़ने पर और अन्त में समाकलन के क्रम को बदलने पर, जो दिए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, हमें (2.10) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

उदाहरण

माना

$$f(x_1, \ldots, x_r) = e^{-\sum_{j=1}^{r} \delta_j x_j} K_v(x_1).$$

एर्डेल्यी के फल [2; p. 331, eq. (29)] को उपयोग में लाते हुए

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{k_j-1} f(x_1, \ldots, x_r) dx_1 \ldots dx_r$$

$$= \frac{(\pi)^{1/2} \beta^v \Gamma(k_1+v)\Gamma(k_1-v) \prod_{j=2}^{r} \Gamma(k_j)}{(2)^{k_1}(\delta_1)^{k_1+v}\Gamma(k_1+\frac{1}{2}) \prod_{j=2}^{r} \delta_j^{k_j}} \, {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{k_1+v+1}{2}, \frac{k_1+v}{2} \\ k_1+\frac{1}{2}; \end{matrix} 1-\beta^2/\delta_1^2\right], \qquad (2.11)$$

बशर्ते कि $Re(\delta_1+\beta)>0$.

जब उपर्युक्त नियम का सम्प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} (x_j)^{\rho_j+k_j-2} e^{-\sum_{j=1}^{r} (l_j p_j+\delta_j) x_j}$$

$$H^{0,0:0:(M',N');\cdots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q:l_p:[P',Q'];\cdots;[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_p;(\alpha_p^{(i)})_{i=1,\cdots,r})\}: \\ \{(b_q;(\beta_q^{(i)})_{i=1,\cdots,r})\}: \end{matrix}\right.$$

$$\{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \ldots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\}$$

$$\{(l_{l_p}; (U^{(i)}_{l_p} f^{(i)}_{l_p})_{i=1,\cdots,r})\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\}$$

$$\left.\begin{matrix} ; \\ ; \end{matrix} \; c_1(p_1x_1)^{\mu_1}, \ldots, c_r(p_rx_r)^{\mu_r} \right] \cdot K_v(\beta x_1) dx_1 \ldots dx_r$$

$$= \frac{(\pi)^{1/2}\beta^v \Gamma(k_1+v)\Gamma(k_1-v) \prod_{j=2}^{r} \Gamma(k_j)}{\prod_{j=1}^{r} (p_j)^{\rho_j-1}(2)^{k_1}(\delta_1)^{k_1+v}\Gamma(k_1+\frac{1}{2}) \prod_{j=2}^{r} \delta_j^{k_j} \prod_{j=1}^{r} (l_j)^{\rho_j-k_j}}$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}(k_1+\nu+1)/2,\ (k_1+\nu)/2; \\ (k_1+\frac{1}{2});\end{matrix}\ 1-\beta^2/\delta_1^2\right]\cdot H^{0,0:0:(M',N'+1);\ldots;(M^{(r)},N^{(r)}+1)}_{p,q:|p:[P'+1,Q'];\ldots;[P^{(r)}+1,Q^{(r)}]} $$

$$ \{(a_p;(a_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : $$

$$ \{(b_q;(\beta^{(i)}{}_q)_{i=1,\ldots,r})\} : \{(l_{|p};\ (U_{|p}\,f_{|b}^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : $$

$$ (1-\rho_1+k_1,\ \mu_1),\ \{(c'_{P'},\ \gamma'_{P'})\};\ \ldots;,\ (1-\rho_r+k_r,\ \mu_r),\ \{c^{(r)}{}_{P(r)},\ \gamma^{(r)}{}_{P(r)})\} : $$

$$ \{(d'_{Q'},\ \delta'_{Q'})\};\ \ldots;\ \{(d^{(r)}{}_{Q(r)},\ \delta^{(r)}{}_{Q(r)})\}; $$

$$ \left. c_1(1/l_1)^{\mu_1},\ \ldots,\ c_r(1/l_r)^{\mu_r}\right], \quad (2.12) $$

बशर्ते कि (2.10) तथा (2.11) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों।

उपर्युक्त उदाहरण में, हम $|p=0$ लें तो समीकरण (2.12) समानीत होकर मौर्य[3] के द्वारा अध्ययन किये गये परिणाम को प्रदान करता है।

(iv) **नियम 4** सार्वीकृत पार्सेवाल गोल्डस्टीन सूत्र

यदि

$$ \frac{1}{p_1\ldots p_r}\,\phi_1[f_1: p_1,\ \ldots,\ p^r]=MT[\,f_1(x_1,\ \ldots,\ x_r)] $$

तथा

$$ \frac{1}{p_1\ldots,p_r}\,\phi_2[f_2 : p_1,\ \ldots,\ p_r]=MT[\,f_2(x_1,\ \ldots,\ x_r)], $$

जहाँ $f_1(x_1,\ \ldots,\ x_r)$ तथा $f_2((x_1,\ \ldots,\ x_r)$ संतत हैं $x_1,\ \ldots,\ x_r>0$ के लिए तो

$$ \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{1}{x_1\ldots x_r}\,\phi_1[f_1 : (x_1,\ \ldots,\ x_r)]\cdot f_2(x_1,\ \ldots,\ x_r)dx_1\ldots dx_r $$

$$ =\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{1}{x_1\ldots x_r}\,\phi_2[f_2 : (x_1,\ \ldots,\ x_r)]\cdot f_1(x_1,\ \ldots,\ x_r)dx_1\ldots dx_r $$

बशर्ते कि उपर्युक्त समीकरणों में दोनों समाकल अभिसारी हों।

(v) **नियम 5**

यदि

$$ \frac{1}{p_1\ldots p_r}\,\phi[f : p_1,\ \ldots,\ p_r]=MT[\,f(x_1,\ \ldots,\ x_r)], $$

तो

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{p_1 \cdots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r]\, dp_1 \ldots dp_r$$

$$= p_1 \ldots p_r\, MT\Big[\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{f(u_1, \ldots, u_r)}{u_1, \ldots, u_r}\, du_1 \ldots du_r\Big], \qquad (2.14)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो ।

इसकी उपपत्ति नियम 2 पर आधारित है ।

(vi) **नियम 6**

यदि

$$\frac{1}{p_1 \cdots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r] = MT[f(x_1, \ldots, x_r)],$$

तो

$$\int_p^\infty \cdots \int_p^\infty \frac{1}{p_1 \cdots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r]\, dp_1 \ldots dp_r$$

$$= p_1 \ldots p_r\, MT\Big[\int_0^t \cdots \int_0^t \frac{1}{u_1 \ldots u_r} f(u_1, \ldots, u_r) du_1 \ldots du_r\Big], \qquad (2.15)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो ।

इसकी उपपत्ति पूर्णतया नियम 2 पर निर्भर है ।

(vii) **नियम 7**

यदि

$$\frac{1}{p_1 \cdots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r] = MT[f(x_1, \ldots, x_r)]$$

तो

$$\int_0^{p_r} \cdots \int_0^{p_1} \frac{1}{p_1 \cdots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r] dp_1 \ldots dp_r$$

$$= p_1 \ldots p_r\, MT\Big[\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{x_1 \ldots x_r} f(x_1, \ldots, x_r) dx_1 \ldots dx_r\Big] \qquad (2.16)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो ।

(viii) **नियम 8**

यदि

$$\frac{1}{p_1 \ldots p_r} \phi[f : p_1, \ldots, p_r] = MT[f(x_1, \ldots, x_r)],$$

तो

$$(-1)^r (p_1 \ldots p_r) \prod_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} \{\phi[f : p_1, \ldots, p_r]\}$$

$$= p_1 \ldots p_r \; MT\left[(x_1 \ldots x_r) \prod_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} f(x_1, \ldots, x_r)\right], \tag{2.17}$$

बशर्ते कि $\phi[f : p_1, \ldots, p_r]$ तथा $f(x_1, \ldots, x_r)$ इन दोनों फलनों का अस्तित्व हो और वे संतत हों।

उपपत्ति

नियम 2 के अनुसार

$$\phi[f : p_1/t_1, \ldots, p_r/t_r] = p_1 \ldots p_r \; MT[f \;(t_1 x_1, \ldots, t_r, x_r)].$$

दोनों पक्षों को $t_1, \ldots, t_r$ के प्रति समाकलित करने पर तथा $t_1 = t_2 = \ldots t_r = 1$, रखने पर वांछित फल प्राप्त होता है।

(ix) **नियम 9**

यदि

$$\phi_1[f : p_1, \ldots, p_r] = p_1 \ldots p_r \; MT[f_1(x_1, \ldots, x_r)] \tag{2.18}$$

तथा

$$\phi_2[f : p_1, \ldots, p_r] = p_1 \ldots p_r \; MT[f_2(x_1, \ldots, x_r)] \tag{2.19}$$

जहाँ $f_1(x_1, \ldots, x_r)$ तथा $f_2(x_1, \ldots, x_r)$ संतत हैं $x_1, \ldots, x_r > 0$ के लिए,

तो $$MT\left\{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \phi_2[f_2 : y_1, \ldots, y_r] \, . \, f_1(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_r y_r) \, . \, \frac{dy_1}{y_1} \ldots \frac{dy_r}{y_r} . \right\}$$

$$= MT\left\{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \phi_1[f_1 : y_1, \ldots, y_r] \, . \, f_2(x_1 y_1, \ldots, x_r y_r) \, . \, \frac{dy_1}{y_1} \ldots \frac{dy_r}{y_r}\right\}, \tag{2.20}$$

बशर्ते कि (2·20) में दोनों ही समाकलों का अस्तित्व हो।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे० Comp. Math, 1963, **15**, 239-41

2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 1, बैटमैन मैनुस्क्रिप्ट प्रोजेक्ट, मैकग्राहिल कं० 1954

3. मौर्य, आर० पी०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, 1979

4. प्रसाद, वाई० एन० तथा मौर्य, आर० पी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1969, **22**, 73-83

5. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, ए० के०, **इंडियन जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०**, 1969, **10**, 1505-1511

6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर०, Proc. of lhe Koninklijke Nederlandse Akademic Van Wetensehappen, Amsterdam, Series A, 1978, **81**(**1**)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 23-29

मोम पायसों की श्यानता पर पायसीकारक सान्द्रता, परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन तथा कण परिमाण का प्रभाव

महेश कुमार शर्मा

यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून

[प्राप्त–सितम्बर 29, 1980]

सारांश

तारपीन (मॉनटन मोम) और जल—परिक्षिप्त तथा सतत प्रावस्थाओं तथा पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनोस्टिएरेट-पायसीकारक द्वारा निर्मित मोम पायसों की श्यानता पर पायसीकारक सान्द्रता, परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन (ϕ) तथा कण-परिमाप के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। मोम पायसों के प्रयोगात्मक आंकड़ों की व्याख्या निम्न समीकरणों द्वारा की गई है : सापेक्ष श्यानता $(\eta_{rel})=1/1-(h\phi)^{1/3}$ तथा $\eta_{rel}=\exp\,(a\phi/1-k\phi)$। भिन्न-भिन्न परिक्षिप्त प्रावस्था आयतनों द्वारा निर्मित मोम पायसों में, आयतन घटक, h, पर पायसीकारक सान्द्रण का प्रभाव दर्शाता है कि पायसों की श्यानता में विभिन्नता, पायसों के परिक्षिप्त बिन्दुकों के चारों ओर पायसीकारक की अधिशोषित अंत:पृष्ठीय परत के गुणों में परिवर्तन के कारण होती है। स्थिरांक, a, का मान, ठोस गोले के 2.5 मान से कम पाया गया है और द्रवगतिक परस्परक्रिया गुणांक, k, का मान माध्य कण-परिमाण के बढ़ने से घटता है।

Abstract

The influence of emulsifier concentration, dispersed phasc volume and particle size on the viscosity of wax emulsions. *By* M. K. Sharma, Instruments Research and Development Establishment, Dehra Dun.

The effects of emulsifier concentration, dispersed phase volume (ϕ) and particle size on the viscosity of wax emulsions prepared with turpentine (montan wax) and water as dispersed and continuous phases and polyoxyethylene sorbitan monostearate as emulsifier, have been studied. Experimental viscosity data of wax emulsions have been interpretted in terms of equations, relative viscosity $(\eta_{rel})=1/1-(h\phi)^{1/3}$ and $\eta_{rel}=\exp\,(a\phi/1-k\phi)$. The influence of emulsifier concentration on the volume factor,

h, of wax emulsions with different values of ϕ indicates that the variation in the viscosity of emulsions might be due to the changes in the properties exhibited by the absorbed interfacial film of the emulsifier around the dispersed globules of emulsions. The values of constant, a, have been found to be below the value of 2·5 for solid spheres and the hydrodynamic interaction coefficient, k, decreases with as increase in the mean particle size.

किसी पायस की श्यानता पर अनेक घटक प्रभाव डालते हैं [1]। पायस के प्रवाह गुणों के अध्ययन के वास्ते अत्यन्त आवश्यक है कि हमें श्यानता पर परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन, पायसीकारक सान्द्रता और कण-परिमाण वितरण का ज्ञान हो।

हैट्स्चेक[2] के अनुसार, जब परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सांन्द्रता (ϕ) 0.5 से अधिक होती है, तो किसी पायस सापेक्ष श्यानता (η_{rel}) को निम्न समीकरण द्वारा दर्शाया जा सकता है,

$$\eta_{rel}=\frac{1}{1-(\phi)^{1/3}} \tag{1}$$

परन्तु साइबरी[3,4] ने उपरिलिखित समीकरण में संशोधन किया,

$$\eta_{rel}=\frac{1}{1-(h\phi)^{1/3}} \tag{2}$$

जहाँ स्थिरांक h, आयतन घटक है। साइबरी के अनुसार विभिन्न कण-परिमाणों के पायसों में h का मान लगभग 1.3 है।

स्वीनी तथा गेकलर[5] तथा सौन्डर्स[6] के अनुसार सापेक्ष श्यानता पर कण-परिमाण और ϕ के प्रभाव को निम्न समीकरण से दर्शा सकते हैं,

$$\eta_{rel}=\exp\left(\frac{a\phi}{1-k\phi}\right) \tag{3}$$

जहाँ a एक स्थिरांक है और k द्रवगतिक परस्परक्रिया गुणांक है, जो माध्य कण-परिमाण पर निर्भर करता है।

समीकरण (3) को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं,

$$\frac{\phi}{\log \eta_{rel}}=-\frac{2.303\,k\phi}{a}+\frac{2.303}{a} \tag{4}$$

इस प्रकार a तथा k के मान, $\phi/\log \eta_{rel}$ और ϕ के रैखिक आलेख से ज्ञात किये जा सकते हैं।

मोम पायस के पिछले कार्यों के क्रम में [7, 8], प्रस्तुत अन्वेषण में तारपीन (मॉनटन मोम) और जल-दो प्रावस्थाओं तथा पॉलिऑक्सीएथिलीन सार्बिटन मोनोस्टिएरेट-पायसीकारक द्वारा निर्मित मोम पायसों की श्यानता पर पायसीकारक सान्द्रता, परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन और कण-वितरण के प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

पायसों का निर्माण : मोम पायसों के निर्माण में तारपीन (मॉनटन मोम) तथा जल दो प्रावस्थाओं के रूप में और पॉलिऑक्सीएथिलीन सार्बिटन मोनोस्टिएरेट (ट्वीन 60; के० एल०) पायसीकारक के रूप में उपयोग किये गये। ऋणायनी पृष्ठसक्रियक के सान्द्रण को 1.0 से 5.0% तक (पायस का $w/v\%$) परिवर्तित किया गया। तारपीन (30° सें० पर आपेक्षिक गुरुत्व 0.814) में मॉनटन मोम (दक्षिण आरकोट, तामिलनाडु, गलनांक 84°±2° सें०) के 2.0% घोल का आयतन प्रभाज 0.1 से 0.65 तक बदला गया। पायसों की अन्तिम निर्मिति में मॉनटन मोम, जल और अनायनिक पृष्ठ सक्रियक के विषमांगी मिश्रण का ब्रौन इमल्सेटर की सहायता के पायसीकरण किया गया। प्रत्येक पायस को बनाने में, पायसीकरण का समय (5 मिनट) और ताप (30° सें०) एकसमान रखा गया।

सारणी 2 में मोम पायसों को उनके परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सांन्द्रता के आधार पर रखा गया है। पायसीकारक की सांन्द्रता 2.0% ली गई। नमूनों की प्रत्येक श्रेणी में मोम पायस, पाँच विभिन्न परिक्षिप्त प्रावस्था सांन्द्रता में से केवल एक को लेकर बनाये गये। इन प्रत्येक मोम पायस के भागों को ऋणायनी पृष्ठ सक्रियक के उचित सान्द्रण से युक्त जलीय प्रावस्था से तनु किया गया ताकि कम ϕ के मान प्राप्त हो सकें। निम्नलिखित विधि द्वारा पायसों के कण-परिमाण वितरण का विश्लेषण करने पर ज्ञात हुआ कि इस तनूकरण विधि से आरम्भिक कण-परिमाण वितरण में कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

कण-परिमाण विश्लेषण : जले-तैलम् मोम पायसों का कण-परिमाण विश्लेषण सूक्ष्मदर्शीय फोटोग्राफी विधि द्वारा किया गया[9]। इस फोटोग्राफी विधि में पायसों के माइक्रोस्कोपिक स्लाइडों के फोटोमाइक्रोग्राफ एक संलग्न कैमरा से युक्त कार्ल जाइस जेना माइक्रोस्कोप की सहायता से 25× प्रकाशिकीय व्यवस्था और 40× अभिदृश्यक को उपयोग करके ओरवो, एन० पी० 27, 400 ए० एस० ए० कर्तन फिल्मों पर लिए गए, जैसा कि पिछले कार्य में वर्णन किया गया है[10]।

प्रत्येक पायस को बनाने के तुरन्त पश्चात्, माध्य आयतन बिन्दुक व्यास (D_m) 30° से० पर ज्ञात किये गये। D_m की गणना निम्न सूत्र से की गई[11],

$$D_m = \left[\frac{\Sigma n D^3}{\Sigma n}\right]^{1/3} \tag{5}$$

जहाँ n बिन्दुकों की संख्या है और D, बिन्दुक व्यास है।

श्यानता मापन : मोम पायसों की श्यानता ज्ञात करने के लिए एक वाइजेनबर्ग रीओगोनिओमिटर मॉडेल R. 16 (सैन्गामो वेस्टन बोग्नर रेगिस, इंग्लैण्ड) उपयोग में लाया गया[12]। उच्च अपरूपक गति

(1467.6 सेकन्ड$^{-1}$) इस्तेमाल में लाई गई । शंकु व्यास और शंकु कोण क्रमशः 7.5 से० मी० तथा 1° 32′ लिए गए । पायस के सम्पूर्ण भाग को एकसमान अपरूपक बल प्रदान करने के लिए छोटा शंकु कोण लिया गया । एक जल जैकेट की सहायता से ताप को 30°±0.1° से० पर स्थिर रखा गया और सब पायसों को, श्यानता ज्ञात करने से पहले, शंकु तथा प्लेट के मध्य, आधे घंटे तक रखा गया ताकि वे इस स्थिर ताप को प्राप्त कर लें ।

परिणाम तथा विवेचना

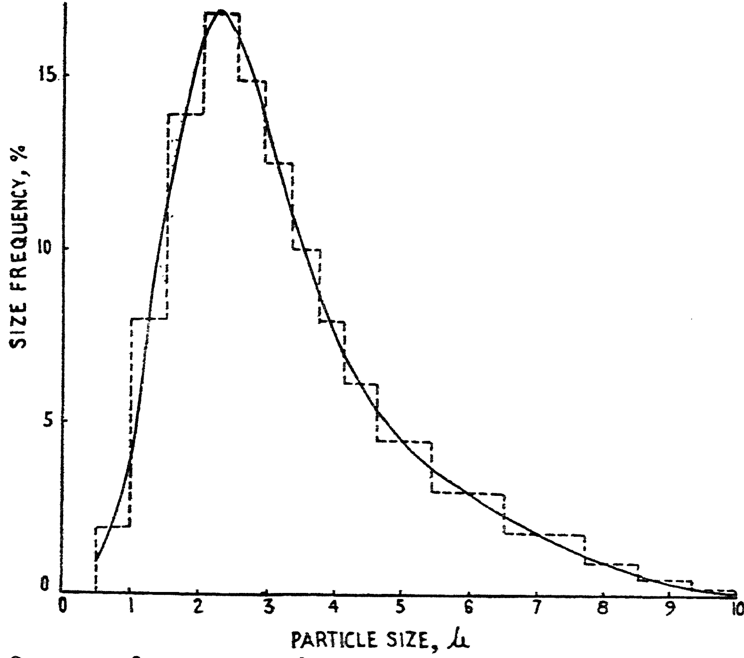
जले-तैलम् मोम पायसों के वर्तमान श्यानता आंकड़ों की व्याख्या साइबरी द्वारा संशोधित, हैट्स्चेक समीकरण से की गई है तथा भिन्न-भिन्न परिक्षिप्त प्रावस्था आयतनों द्वारा निर्मित मोम पायसों में आयतन घटक h पर पायसीकारक सान्द्रण का प्रभाव सारणी 1 में दर्शाया गया है ।

सारणी 1 से ज्ञात होता है कि आयतन घटक h का औसत मान, सैद्धांतिक मान 1.3 के बहुत अधिक समीप नहीं है और कुछ मान तो एकक से भी कम पाये गये हैं । विभिन्नता बहुत अधिक है और इसके कारण पायस के प्रकार (तारपीन (मॉनटन मोम)—पृष्ठ सक्रियक—जल पायस), पायसीकारक के स्वरूप तथा सान्द्रता और परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सान्द्रता हो सकते हैं । पायसों में ϕ के मान 0.50-0.65 के मध्य, पायसीकारक सान्द्रता के 1.0 से 5.0% तक बढ़ने पर, h का मान बढ़ता है और साथ ही पायसीकारक सान्द्रता के मान 1.0-5.0% के मध्य, परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन के 0.50 से 0.65 तक बढ़ने पर, h का मान घटता है । पायसों की श्यानता में विविधता और इस प्रकार ϕ तथा पायसीकारक सान्द्रण के परिवर्तन द्वारा h के मान में विभिन्नता, पायसों परिक्षिप्त बिन्दुकों के चारों ओर पायसीकारक की अधिशोषित अंतःपृष्ठीय परत के गुणों के परिवर्तन के कारण होती है ।

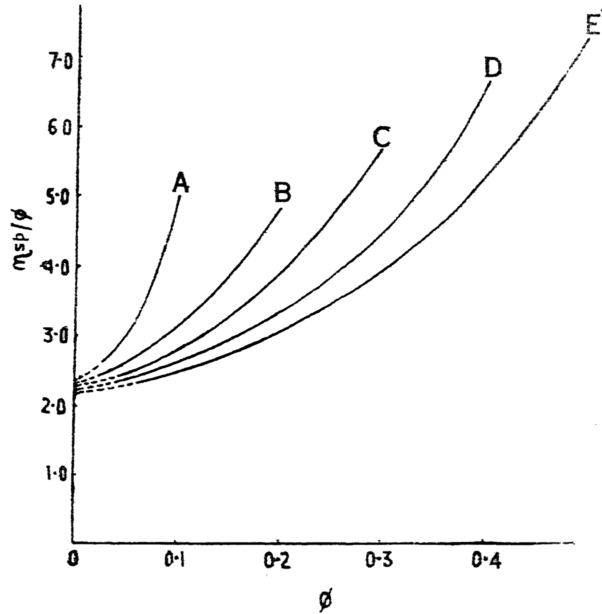
चित्र 1 में 0.5 परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सान्द्रता और 2.0% पृष्ठ सक्रियक सान्द्रण से निर्मित एक प्रारूपिक मोम पायस 'य' के कण-परिमाण आवृति वितरण आंकड़े दिखाये गये हैं । मोम पायस में 1.0 माइक्रोन से कम बिन्दुकों की प्रतिशतता न्यून है । 2.0% ट्वीन 60 से स्थायीकृत, पायसों की श्रेणी 'A' से 'E' तक के लिए, समीकरण (5) से गणना द्वारा ज्ञात किये गये माध्य आयतन बिन्दुक व्यास (D_m) सारणी 2 में दिए गए हैं । मूल तथा तनूकृत मोम पायसों के श्यानता आंकड़े भी सारणी 2 में दिखाये गये हैं ।

चित्र 2 में परिवर्तित श्यानता η_{sp}/ϕ और ϕ के आलेख से ज्ञात होता है कि ϕ के मान 0.10 और 0.50 के मध्य अरेखीय आश्रितता है और साथ ही यह भी पता चलता है कि माध्य कण-परिमाण श्यानता आंकड़ों पर अपना निश्चित प्रभाव डालते हैं तथा कण-परिमाण वितरण का भी अवश्य अपना एक विशेष प्रभाव है ।

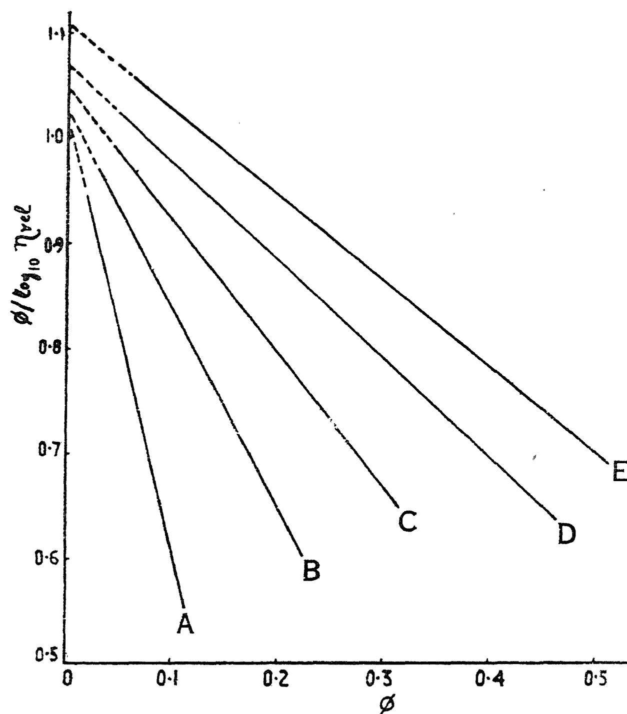
विभिन्न D_m के मोम पायसों की श्रेणी 'A' से 'E' के लिए, चित्र 3 में $\phi/\log \eta_{rel}$ और ϕ के मध्य आलेख दर्शाता है कि प्रत्येक कण-परिमाण के लिए रेखीय सम्बन्ध है । इन आलेखों से ज्ञात किए गए a तथा k के सम्बद्ध मान सारणी 2 में दिए गए हैं । मोम पायसों के लिए स्थिरांक a के मान, आइंस्टीन के



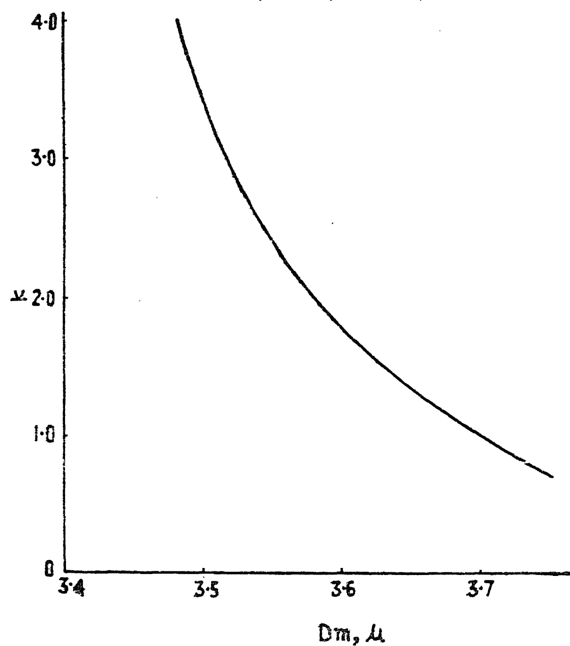
चित्र 1. ट्वीन 60 द्वारा स्थायीकृत तारपीन (मॉनटन मोम)—जल मोम पायस के कण-परिमाण वितरण आंकड़े



चित्र 2. जले-तैलम् मोम पायसों में परिवर्तित श्यानता तथा परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सान्द्रता के मध्य आलेख



चित्र 3· मोम पायसों में $\phi/\log\,\eta_{rel}$ तथा ϕ के मध्य आलेख



चित्र 4· द्रवगतिक परस्परक्रिया गुणांक तथा माध्य कण-परिमाण के मध्य सम्बन्ध

मान 2·5 से कम पाये गये हैं जो दर्शाते हैं कि बिन्दुक दृढ़ गोले के समान व्यवहार नहीं करते हैं और पायसों में बिन्दुक समुदाय विद्यमान हैं। k के मान प्रकट करते हैं कि यह परस्पर क्रिया गुणांक माध्य कण-परिमाण पर निर्भर करता है। k तथा D_m के मध्य आलेख चित्र 4 में दिखाया गया है, जो दर्शाता है कि k का मान, कण-परिमाण के बढ़ने पर अरेखीय रूप में घटता है।

इस प्रकार प्रस्तुत अन्वेषण दर्शाता है कि मोम पायसों की सापेक्ष श्यानता, स्थिर पायसीकारक सान्द्रता पर, ϕ के मान के 0·10 से 0·50 तक बढ़ने पर, बढ़ती है, तदनुसार माध्य कण-परिमाण का मान 3.482 से 3·746 माइक्रोन तक बढ़ता है और k तथा a के मान 4·027 से 0·721 तक और 2·260 से 2.077 तक क्रमशः घटते हैं।

निर्देश

1. शर्मन, पी०, Emulsion Science, अकादमी प्रेस, लंदन, 1169, पृष्ठ 285
2. हैट्स्चेक, ई०, **कोलॉइड जर्न०**, 1911, **8**, 34
3. साइबरी, जे० ओ०, **ट्रान्स० फैराडे सोसाइटी**, 1930, **26**, 26
4. साइबरी, जे० ओ०, **ट्रान्स० फैराडे सोसाइटी**, 1931, **27**, 161
5. स्वीनी, आर० एच० तथा गेकलर, आर० डी०, **जर्न० एप्ला० फिजिक०**, 1954, **25**, 1135
6. सौन्डर्स, एफ० एल०, **जर्न० कोलॉइड साइन्स**, 1961, **16**, 13
7. शर्मा, एम० के०, जैन, के० डी०, जैन, ए० के० तथा शर्मा, बी० के०, **इण्डियन जर्न० टेक्नोल०**, 1979, **17**, 390
8. शर्मा, एम० के०, जैन, के० डी०, जैन, ए० के० तथा शर्मा, बी० के०, **इण्डियन जर्न० टेक्नोल०**, 1980, **18**, 39
9. शिलाबर, सी० पी०, Photomicrography in Theory and Practice, विली, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 41
10. शर्मा, एम० के०, **जर्न० कोलॉइड इन्टरफेस साइन्स**, 1975, **53**, 340
11. बेजेमर, सी० तथा श्वार्ज, एन०, **कोलॉइड जर्न०**, 1956, **146**, 145
12. वाइजेनबर्ग, के०, Proc 1st Int. Congr. Rheol., नार्थ हॉलैंड पब० कं०, एम्सटर्डम, 1949

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 31-40

फूरियर गुणांकों के अनुक्रम की हार्मोनिक संकलनीयता

वेद प्रकाश

गणित विभाग, नर्मदा महाविद्यालय, होशंगाबाद (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 21, 1979]

सारांश

यदि
$$\int_0^t |\psi(v)|\, du=0(t) \text{ ज्यों ज्यों } t\to 0$$
$$\int_{\pi/n}^{\delta} \frac{|\psi(t+\pi/n)-\psi(t)|}{t} \log(1/t)\, dt=0(\log n)$$

तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ संकलनीय $(H, 1)\,(C, 1)$ है l/π के मान के लिए। प्रस्तुत प्रपत्र में हम उपर्युक्त प्रमेय को सार्वीकृत करेंगे।

Abstract

On the harmonic summability of a sequence of Fourier coefficients. *By* Ved Prakash, Department of Mathematics, Narmada Mahavidyalaya, Hoshangabad

If
$$\int_0^t |\psi(v)|\, du=0(t) \text{ as } t\to 0$$
$$\int_{\pi/n}^{\delta} \frac{|\psi(t+\pi/n)-\psi(t)|}{t} \log(1/t)dt=0(\log n)$$

then the sequence $\{nB_n(x)\}$ is summable $(H, 1)\,(C, 1)$ to the value of l/π.

In the present paper we generalize the above theorem.

1. माना $f \epsilon L(0, 2\pi)$ एवं इस परास से वाह्यत: 2π आवर्त के साथ आवर्ती है। माना

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.1}$$

$f(x)$ की फूरियर श्रेणी है तो फूरियर श्रेणी की सहयुग्मी श्रेणी निम्न होगी ।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x). \tag{1.2}$$

माना $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है कि

$$P_n = \sum_{k=0}^{r} p_k \neq 0.$$

अनुक्रम $\{S_n\}$ के लिए रूपान्तरण

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k,$$

अनुक्रम $\{S_n\}$ के नालुंड माध्यों के अनुक्रम $\{t_n\}$ को परिभाषित करता है। यदि हम $p_n = \frac{1}{n+1}$ तथा $P_n \sim \log n$, चुनें तो रूपान्तरण t_n

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=0}^{n} \frac{S_n - s}{k+1}$$

में समानीत हो जाता है। हम लिखेंगे

$$\psi(t) = f(x+t) + f(x-t) - l,$$

जहाँ l सान्त संख्या है

$$N_{n+1}(t) = -\tfrac{1}{2} + \sum_{v=0}^{n+1} e^{ivt}$$

$$= \frac{\sin (n+3/2)t}{2 \sin t/2} - \frac{\cos (n+3/2)t}{2 \sin t/2} + \frac{l \sin t}{4 \sin^2 t/2}$$

2. फूरियर गुणांकों के फूरियर अनुक्रमक की हार्मोनिक संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय राय[3] के कारण ज्ञात है ।

प्रमेय

यदि

$$\int_0^t |\psi(v)| \, du = 0(t), \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0 \tag{2.1}$$

$$\int_{\pi/n}^{\delta} \frac{|\psi(t+\pi/n)-\psi(t)|}{t} \log(1/t)\,dt = 0(\log n) \tag{2.2}$$

तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ संकलनीय $(H, 1)(C, 1)$ है $1/\pi$ के मान के लिए।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम उपर्युक्त प्रमेय को सार्वीकृत करेंगे।

वास्तव में हम निम्नलिखित को सिद्ध करते हैं :

प्रमेय

यदि

$$\psi(t) = \int_0^t |\psi(v)|\, du = 0(t),\ t \to 0 \tag{2.3}$$

और आगे भी यदि किसी n के लिए $m = m(n) > n$ इस तरह हो कि

$$\int_{1/m}^{1/(m-n)} \frac{|\psi(t+\pi/m)-\psi(t)|}{t} \log 1/t\,dt = 0 \log(n) \tag{2.4}$$

तथा

$$\sum_{v=n}^{m} (|a_v| + |b_v|) \to 0 \tag{2.5}$$

तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ संकलनीय $(H, 1)(C, 1)$ है l/π के मान के लिए।

यदि $(m-n)$ आबद्ध हो, तो उपर्युक्त प्रमेय राय की प्रमेय[3] में समानीत हो जाती है।

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1

M तथा K समस्त मानों के लिए

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\sin kt}{k} = O(1) \tag{3.1}$$

प्रमेयिका 2

यदि $0 < t < \pi$, तो

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\cos kt}{k} = O(\log 1/t). \tag{3.2}$$

प्रमेयिका 3

यदि $0 < t < \pi/\mu$, तो हमें प्राप्त होगा

$$\frac{1}{\log M} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \frac{\sin kt}{k(M+1-k)t^2} - \frac{\cos kt}{(M+1-k)t} \right\} = O(M) \tag{3.3}$$

माना $\{\lambda_n\}$ धनात्मक संख्याओं का अनुक्रम है जो बाद में निश्चित किया जावेगा और हम लिखते हैं

$$\sum_{n=N}^{M} \lambda_n N_n(t) = \sum_{n=M}^{M} \lambda_n \left[N_{M+1}(t) - \sum_{m=n+1}^{M+1} e^{imt} \right]$$

$$= (\Lambda_M - \Lambda_N) N_{M+1}(t) - \sum_{n=N+1}^{M+1} \left(\sum_{m=N}^{n-1} \lambda_m \right) e^{int}.$$

$$N_{M+1}(t) = \frac{1}{(\Lambda_M - \Lambda_N)} \sum_{n=N}^{M} \lambda_n N_n(t) + \frac{1}{(\Lambda_M - \Lambda_N)} \sum_{n=N+1}^{M+1} (\Lambda_{n-1} - \Lambda_{N-1}) e^{int}. \tag{3.4}$$

वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों को समीकृत करने पर

$$\frac{\sin (M+3/2)t}{2 \sin t/2} = \frac{1}{(\Lambda_M - \Lambda_N)} \sum_{n=N}^{M} \lambda_n \frac{\sin (n+\frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} + \frac{1}{(\Lambda_M - \Lambda_N)} \times \sum_{n=N+1}^{M+1} (\Lambda_{n-1} \Lambda_{N-1}) \cos nt. \tag{3.5}$$

$$\frac{\cos (M+3/2)t}{2 \sin t/2} = \frac{1}{(\Lambda_M - \Lambda_N)} \sum_{n=N}^{M} \lambda_n \frac{\cos (n+\frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} + \frac{1}{\Lambda_M - \Lambda_N} \times \sum_{n=N+1}^{M+1} (\Lambda_{n-1} - \Lambda_{N-1}) \sin nt \tag{3.6}$$

जहाँ

$$\Lambda_n = \sum_{v=1}^{n} \lambda_v.$$

हम $\mu = \frac{1}{2}[M+N]$ तथा $\nu = \frac{1}{2}[M-N]$ लिखेंगे और कल्पना करेंगे कि $\lambda_n = 0$, आन्तरिक $(\mu-\nu, \mu+\nu)$ के वाह्यतः तथा $(\mu-\nu, \mu+\nu)$ $\lambda_{\mu+v} = \lambda_{\mu-u}$ $0 \leqslant n \leqslant \nu$ के लिए तो हमें

$$\sum_{n=N}^{M} \lambda_n e^{i(n+1/2)t} = e^{(\mu+1/2)it} \sum_{n=-v}^{v} \lambda_{\mu+n} e^{int}$$

$$= 2e^{(\mu+1/2)it} \left(\frac{\lambda\mu}{2} + \sum_{n=1}^{v} \lambda_{\mu+n} \cos nt \right).$$

प्राप्त होगा। अतः

$$\sum_{n=N}^{M} \lambda_n \cos (n+\tfrac{1}{2})t = \cos (\mu+\tfrac{1}{2})t \left(\frac{\lambda\mu}{2} + \sum_{n=1}^{v} \lambda_{\mu+n} \cos nt \right) \tag{3.7}$$

तथा

$$\sum_{n=N}^{M} \lambda_n \sin (n+\tfrac{1}{2})t=\sin (\mu+\tfrac{1}{2})t \left(\frac{\lambda\mu}{2}+\sum_{n=1}^{v} \lambda_{\mu+n} \cos nt\right) \tag{3.8}$$

माना $0<\delta N<\pi$, तथा $h(t)$ विशिष्ट फलन है, अन्तराल $(-\delta_N, \delta_N)$ का जिसका आवर्त 2π है तो

$$\frac{\lambda\mu}{2}+\sum_{n=1}^{v} \lambda_{\mu+n} \cos nt=\frac{1}{\pi(\nu+1)}\int_{-\delta N}^{\delta N} K_v(t-\mu)du$$

$$=\frac{1}{\pi(\nu+1)}\int_{t-\delta_N}^{t+\delta_N} K_v(u)du$$

$$=\delta_N+\sum_{n=1}^{v}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right) 1/n\ [\sin n(t+\delta_N)-\sin (t-\delta_N)]$$

$$=\delta_N+\sum_{n=1}^{v}\left(1-\frac{n}{\nu+1}\right)\frac{2 \sin n\, \delta_N}{n} \cos nt.$$

यदि हम $\delta_N=\frac{1}{2\nu}$ लें तो

$$\mu_v=1/\nu,\ \lambda_{\mu+n}=\left(1-\frac{n}{\nu+1}\right)\frac{2 \sin n\, \delta_N}{n} (n=1, 2, \ldots \nu).$$

आगे भी

$$\frac{\lambda\mu}{2}+\sum_{n=1}^{v} \lambda_{\mu+n}=\frac{1}{\pi(\nu+1)}\int_{-1/2v}^{1/2v} K_v(u)\, du<1 \text{ तथा }>\frac{1}{\pi^2}$$

क्योंकि $K_v(\mu)\geqslant\nu^2/\pi\ \ 0\leqslant\nu\leqslant\delta_N$ के लिए

अत: $1/\pi<\Lambda_M-\Lambda_{N-1}<2.$

4. प्रमेय की उपपत्ति

निर्देश[2] से यह ज्ञात है कि यदि $\sigma_n(x)$ अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ का $(C, 1)$ माध्य हो तो

$$\sigma_M(x)-l/\pi=1/\pi\int_0^{\pi} \psi(t)\left(\frac{\sin Mt}{Mt}-\frac{\cos Mt}{t}\right) dt+O(1).$$

संकलन की हार्मोनिक विधि के कारण हमें केवल इतना ही सिद्ध करना होगा कि

$$t_M=\frac{1}{\pi \log M}\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\pi} \psi(t)\ H_M(t)dt$$

$$=O(1), \text{ ज्यों ज्यों } M\to\infty,$$

जहाँ
$$H_M(t)=\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\sin kt}{k(M+1-k)t^2}-\frac{\cos kt}{(M+1-k)t}\right)dt.$$

हम लेंगे :

$$t_M=\frac{1}{\pi \log M}\left\{\int_0^{\pi/\mu}+\int_{\pi/\mu}^{\delta}\right\}\psi(t)H_M(t)dt$$

$$=I_1+I_2, \text{ माना}$$

प्रमेयिका 3 का उपयोग करने पर

$$I_1=O(M)\int_0^{\pi/\mu}|\psi(t)|\,dt$$

$$=O(M/\mu)$$

$$=O(1).$$

I_2 पर विचार करने पर

$$I_2=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t}\left\{\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\sin kt}{kt(M+1-k)}-\frac{\cos kt}{(M+1-k)}\right)dt\right.$$

$$=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t}\left\{\sum_{k=1}^{M}\frac{\sin kt}{(M+1)kt}+\sum_{k=1}^{M}\frac{\sin kt}{(M+1)(M+1-k)t}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{M}\frac{\cos kt}{(M+1-k)}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t}\left\{\sum_{k=1}^{M}\frac{\sin kt}{k(M+1)t}+\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{(M+1)}\left(\frac{\sin (M+1)^t \cos kt}{kt}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos (M+1)\ t \sin kt}{kt}\right)-\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\cos (M+1)t\cos kt+\sin (M+1)t\sin kt}{M}\right)\right\}dt$$

$$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}-I_{2\cdot3}-I_{2\cdot4}-I_{2\cdot5}, \text{ माना}$$

प्रमेयिका 1 के उपयोग से

$$I_{2\cdot1}=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t^2(M+1)}\sum_{k=1}^{M}\frac{\sin kt}{t}\,dt$$

$$=O\left(\frac{1}{M\log M}\right)\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt$$

$$=O(1) \text{ ज्यों ज्यों } M\rightarrow\infty.$$

$I_{2\cdot3}=O(1)$ की उपपत्ति $I_{2\cdot1}$ की उपपत्ति के ही समान है ।

अब

$$I_{2\cdot2}=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t^2}[\sin (M+3/2)t\cos t-\cos (M+3/2)t\sin t]\sum_{k=1}^{M}\frac{\cos kt}{k}\,dt$$

$$=I_{2\cdot2\cdot1}-I_{2\cdot2\cdot2}, \text{ माना}$$

अब

$$I_{2\cdot2\cdot1}=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t^2}\log(1/t)\sin (M+3/2)t\cos t\,dt.$$

सम्बन्ध (3.5) का प्रयोग करने पर

$$I_{2\cdot2\cdot1}=\frac{1}{\pi \log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\psi(t)\left[\frac{1}{(V_M-\Lambda_N)}\sum_{k=N}^{M}\lambda_n\frac{\sin (n+\frac{1}{2})^t}{\sin^2 t/2}\cos t\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Lambda_M-\Lambda_N}\sum_{n=N+1}^{M+1}(\Lambda_{n-1}-\Lambda_{N-1})\frac{\cos nt}{\sin t/2}\cos t\right]\log(1/t)\,dt$$

$$=M_1+M_2, \text{ माना}$$

अब

$$M_2\leqslant\frac{1}{\pi(\Lambda_M-\Lambda_N)\log M}\int_{\pi/\mu}^{\delta}\psi(t)\sum_{n=N+1}^{M+1}(\Lambda_{n-1}-\Lambda_{N-1})\frac{\cos nt\cos t}{\sin t/2}\log(1/t)\,dt$$

चूँकि $P_n\downarrow$ अतः द्वितीय माध्य प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\int_{\pi/\mu}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t}\log(1/2)\cos(nt)\cos(t)\,dt$$

$$\leqslant \log(\mu/\pi)\int_{\pi/\mu}^{\eta} \frac{\psi(t)}{t} \cos(nt)\cos(t)\,dt \quad (\pi/\mu<\eta<\delta)$$

$$=\log(\mu/\pi)\int_{\pi/\mu}^{\eta} \frac{\psi(t)}{t} \cos nt\,dt - 2P(\mu/\pi)\int_{\pi/\mu}^{\eta} \frac{\psi(t)}{t}\cos nt \sin^2(t/2)\,dt$$

$$\leqslant \log(\mu/\pi)_{\mu/\pi}\int_{\pi/\mu}^{\eta} \psi(t)\cos nt\,dt - AP(\mu/\pi)\int_{\pi/\mu}^{\eta}\psi(t)0\cos nt\,dt$$

$$=K_1+K_2, \text{ माना}$$

जिससे

$$K_1=A\log(\mu/\pi)\mu\left[\int_0^{\eta}\psi(t)\cos nt\,dt-\int_0^{\pi/\mu}\psi(t)\cos nt\,dt\right]$$

$$=A\log(\mu/\pi)\mu\left[\int_0^{\eta}\psi(t)\cos nt\,dt+\int_0^{\pi/\mu}|\psi(t)|\,dt\right]$$

$$=A\mu\log(\mu/\pi)\left[\int_0^{\eta}\psi(t)\cos nt\,dt+O(1/\mu)\right]$$

इसी प्रकार $K_2=K_1$.

$\psi(t)$ की परिभाषा से यह स्पष्ट है कि इसके फूरियर गुणांक $f(t)$ के ही कोटि के हैं। अत: (2.5) के आधार पर $M_2\to 0$.

माना

$$L_v(t)=\frac{1}{v+1}\int_{t-1/2v}^{t+1/2v}K_v(u)\,du$$

तो

$$M_1=\frac{1}{\pi(\Lambda_M-\Lambda_N)\log M}\left(\int_{\pi/\mu}^{\pi/v}+\int_{\pi/v}^{\delta}\right)\psi(t)\,\frac{\sin\mu t}{t^2}L_v(t)\log 1/t\,dt$$

$$=N_1+N_2+O(1), \text{ माना}$$

अब

$$|N_1|\leqslant\frac{A}{\log M}\left|\int_{\pi/\mu}^{\pi/v}\frac{\psi(t)}{t^2}\sin\mu t\,L_v(t)\log(1/t)\,dt\right|$$

$$=\frac{A}{\log M}\left|\sum_{k=0}^{[\mu/2v]}(-1)^k\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\frac{\left(t+\frac{k\pi}{\mu}\right)}{t+\frac{k\pi}{\mu}}\log\left(\frac{1}{t+\frac{k\pi}{\mu}}\right)L_v\left(t+\frac{k\pi}{\mu}\right)\sin\mu t\,dt\right|$$

$$=\frac{A}{\log M}\left|\sum_{k=1}^{[\mu/2v]}\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\left[\frac{(t+2k\pi/\mu)}{t+2k\pi/\mu}\log\left(\frac{1}{t+2k\pi/\mu}\right)L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)\right.\right.$$

$$-\frac{\psi(t+2k-1/\mu\,\pi}{t+2k-1/\mu\,\pi}\log\left(\frac{1}{t+2k-1/\mu\,\pi}\right)L_v\left(+\frac{2k-1}{\mu}\,\mu\right)\sin\mu t\,dt\Big]\Big|$$

$$=\frac{A}{\log M}\Big|\sum_{k=1}^{[\mu/2v]}\Big[\Big|\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\frac{\psi(t+2k\pi/\mu)-\psi(t+2k-1/\mu\,\pi)}{t+2k\pi/\mu}\log\left(\frac{1}{t+2k\pi/\mu}\right)$$

$$L_v\left(t+\frac{2k\,\pi}{\mu}\right)\sin\mu t\,dt-\pi/\mu\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\frac{\psi(t+2k-1/\mu\,\pi)}{(t+2k\pi/\mu)\,(t+2k-1/\mu\pi)}$$

$$\log\left(\frac{1}{t+2k\pi/\mu}\right)L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)\sin\mu t\,dt+\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\frac{\psi(t+2k-1/\mu\,\pi)}{t+2k-1/\mu\,\pi}$$

$$\log\left(1-\frac{\pi/\mu}{t+2k/\mu\,\pi}\right)L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)\sin\mu t\,dt+\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\frac{\psi(t-2k-1/\mu\,\pi)}{t+2k-1/\mu\,\pi}$$

$$\log\left(\frac{1}{t+2k-1/\mu\,\pi)}\right)\left\{L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)-L_v\left(t+\frac{2k-1}{\mu}\,\pi\right)\right\}\sin\mu t\,dt\Big]\Big|$$

$=L_1-L_2+L_3+L_4$, माना

चूंकि $L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)$ आवद्ध है अतः प्रतिबन्ध (2.4) से $L_1=O(1)$.

चूंकि $K_v(\mu)\leqslant v^2$, $L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)$ समस्त v तथा k के लिए आवद्ध है तो

$$L_2\leqslant\frac{A}{\log M}\sum_{k=1}^{[\mu/2v]}\mu/k^2\log(\mu/k)\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\Big|\psi\left(t+\frac{2k-1}{\mu}\,\pi\right)\Big|\,dt$$

$$=\frac{A\mu}{\log M}\sum_{k=1}^{[\mu/2v]}\frac{\log(\mu/k)}{k^3}\,O(k/\mu)+O(1)$$

$$=O(1)$$

तथा

$$L_3<\frac{A}{\log M}\sum_{k=1}^{[\mu/2v]}\mu/k\log\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)\int_{\pi/\mu}^{2\pi/\mu}\Big|\psi\left(t+\frac{2k-1}{\mu}\,\pi\right)\Big|\,dt$$

$$=O(1).$$

निर्देश [1] के अनुसार

$$\Big|L_v\left(t+\frac{2k\pi}{\mu}\right)-L_v\left(t+\frac{2k-1}{\mu}\,\pi\right)\Big|\leqslant\frac{Av}{\mu},$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$L_4=O(1).$$

अब

$$|N_2| \leqslant \frac{A}{\log M} \int_{\pi/v}^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} \log(1/t)\, dt \int_{t-\delta N}^{t+\delta N} \frac{du}{v\mu^2}$$

$$\leqslant \frac{A}{v^2 \log M} \int_{\pi/v}^{\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^3} \log(1/t)\, dt.$$

$$=O(1).$$

अब (3.6) के प्रयोग से

$$I_{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{\pi \log M(\Lambda_M-\Lambda_N)} \int_{\pi/\mu}^{\delta} \psi(t) \sum_{n=N}^{M} \lambda_n \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin t/2} \log 1/t\, dt$$

$$+\frac{1}{\log M(\Lambda_M-\Lambda_N)} \int_{\pi/\mu}^{\delta} \psi(t) \sum_{n=N+1}^{M+1} (\Lambda_{n-1}-\Lambda_{N-1}) \sin nt \log 1/t\, dt.$$

$I_{2\cdot 2\cdot 2}$ की उपपत्ति $I_{2\cdot 2\cdot 1}$ की उपपत्ति के समान है अत:

$$I_{2\cdot 2}=O(1)$$

इसी प्रकार

$$I_{2\cdot 4}=I_{2\cdot 5}=O(1), \text{ ज्यों ज्यों } M\rightarrow\infty.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

निर्देश

1. इज़ुमी, एम० तथा इज़ुमी, एस०, **जर्नं० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1968, **32**, 355-379
2. मोहन्ती, आर० तथा नन्दा, एम०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1954, **5**, 79-84
3. राय, ओ० पी०, **प्रोसी० जापान एकेडमी**, 1965, **41**, 123-127
4. वार्ष्णेय, ओ० पी०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1959, **10**, 790-95

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January 1981, Pages 41-51

लाप्लास श्रेणी की चिजारो संकलनीयता

के० जी० शर्मा तथा के० के० मिश्रा

माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त–फरवरी 2, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य लाप्लास श्रेणी की चिजारो संकलनीयता पर डुप्लेसिस से अधिक व्यापक प्रतिबन्ध के अंतर्गत परास $0<k<\frac{1}{2}$ के लिए प्रमेय सिद्ध करना है।

Abstract

Cesáro summability of Laplace series. *By* K.G. Sharma and K.K. Mishra, Department of Mathematics, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

The object of the present paper is to establish a new result on Cesáro summability of Laplace series under more general conditions than that of Duplessis for the range $0<k<\frac{1}{2}$.

1. माना कि $f(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में समाकलनीय है तथा $\triangle f$ निम्न में से किसी एक को प्रदर्शित करता है

$$f(x)-f(x+h), f(x+h)-f(x), f(x+h)-f(x-h). \quad h \to 0 \tag{1.1}$$

यदि $\triangle f=O(h^{\alpha})$ अथवा $\triangle f=0(h^{\alpha}), 0<\alpha \leqslant 1$ (1.2)

तो $f(x) \epsilon \text{ Lip}^* \alpha$

इसी प्रकार यदि O तथा o के स्थान परस्पर परिवर्तित कर दिये जायँ तब भी $f(x) \epsilon \text{ Lip}^* \alpha$ फलन $f(x)$, श्रेणी Lip (α, p) का होगा यदि

$$\int_a^b | \triangle f |^p \, dx=O(h^{\alpha p}), p \geqslant 1 \text{ तथा } h \to 0. \tag{1.3}$$

2. माना कि फलन $f(\theta, \phi)$ परास $O \leqslant \theta \leqslant x$, $O \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ में, जो सम्पूर्ण गोलीय पृष्ठ पर (L) समाकलनीय है, परिभाषित है। इससे संबद्ध लाप्लास श्रेणी निम्न होगी

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) \int_S \int f(\theta, \phi)\, P_n(\cos \omega)\, d\sigma' \tag{2.1}$$

जहाँ $\cos \omega = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$

तथा $d\sigma' = \sin \theta'\, d\theta'\, d\phi'$

लीगेण्ड्र का बहुपद निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

कागबितलियान्त्ज के अनुसार हम $f(\theta,\phi)$ के व्यापक मान $f(\omega)$ को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin \omega} \int_{c\omega} \oint(\theta', \phi')\, d\sigma' \tag{2.3}$$

जहाँ समाकलन एक लघु वृत्त पर दिया गया है जिसका केन्द्र (θ, ϕ) और वक्र त्रिज्या ω है।

अत: श्रेणी (2.1) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\tfrac{1}{2}) \int_0^{\pi} f(\omega) P_n (\cos \omega) \sin \omega\, d\omega \tag{2.4}$$

हम लिखेंगे

$$\phi(\omega) = f(\cos \omega) - A \tag{2.5}$$

जहाँ पर A कोई भी एक निश्चित स्थिरांक है।

डुप्लेसिस ने लाप्लास श्रेणी की चिजारो संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया।

प्रमेय 'क'

यदि $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ तो $f(\theta, \phi)$ के लिये लाप्लास श्रेणी गोला S पर (C, k) समाकलनीय होगी और इसका मान $f(p)$ होगा यदि

$$F(\theta) = F_p(\theta) = \int_0^{\pi} f(\theta, \Phi)\, d\phi \in \text{Lip}^* (\tfrac{1}{2} - k) \tag{2.6}$$

निर्देशांक (θ, ϕ) इस तरह निश्चित किये जातें हैं कि p हमेशा ध्रुव पर स्थिर रहता है ।

3. हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे

प्रमेय

यदि $\phi(\omega) \in \text{Lip}^* (\frac{1}{2}-k, p); \ (\frac{1}{2}-k)\, p>1$

तथा $0<k<\frac{1}{2}$

तो श्रेणी (2.1) बिन्दु (θ, ϕ) पर (C, k) समाकलनीय होगी और इसका योग A होगा ।

4. प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्न प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी ।

प्रमेयिका 1[5]

निश्चित घनात्मक स्थिरांक C तथा $n\to\infty$ के लिए

$$P_n(\cos\omega)=\begin{cases}\omega^{-1/2}\,O(n^{-1/2}) & .\quad c/n\leqslant\omega\leqslant\pi/2\\ O(1) & .\quad 0\leqslant\omega\leqslant c/n\end{cases} \tag{4.1}$$

प्रमेयिका 2[5]

यदि $c/n\leqslant\omega\leqslant\pi-c/n$

$$P_n(\cos\omega)=n^{-1/2}K(\omega)[\cos\{(n+1)\omega-\pi/4\}+(n\sin\omega)^{-1}O(1)] \tag{4.2}$$

जहाँ पर

$$K(\omega)=\frac{1}{\pi}(\sin\omega)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-1/2}$$

प्रमेयिका 3

यदि $a_n\leqslant\omega\leqslant\pi-\frac{1}{n}, \ \left(a_n\geqslant\frac{1}{n}\right)$ तथा $0<k<\frac{1}{2}$

तो

$$S_n^k(\omega)=\left(A_n^k\right)^{-1}\sum_{m=1}^{n}A_{n-m}^{k-1}\, m^{1/2}\left\{\cos\left\{(m+1)\omega-\frac{3\pi}{4}\right\}\right.$$

$$=e^{i(n+1)\omega}\psi(\omega) \tag{4.3}$$

जहाँ

$$\psi(\omega)=O(n^{1/2-k}\omega^{-k}) \tag{4.4}$$

तथा

$$\psi(\omega+\mu_n)-\psi(\omega)=(n^{-1/2}\omega^{-1}\log n)\ .\ \mu_n=\frac{}{n+1} \tag{4.5}$$

प्रमेयिका 3 की उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$S_n^k(\omega)=\cos\frac{3\pi}{4}\left(A_n^k\right)^{-1}\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-1}\ m^{1/2}\cos(m+1)^{\omega}$$

$$+\sin\frac{3\pi}{4}\left(A_n^k\right)^{-1}\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-1}\ m^{1/2}\sin(m+1)^{\omega}$$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}\left(A_n^k\right)^{-1} R_e\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k}\ (u+1)^{1/2}\ e^{i(m+1)\omega}$$

$$+\sin\frac{3\pi}{4}\left(A_n^k\right)^{-1} I_m\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k}\ (m+1)^{1/2}\ e^{i(m+1)\omega}$$

$$=S_{n-1}^k(\omega)+S_{n\cdot 2}^k(\omega).$$

यह आसानी से दर्शाया जा सकता है कि $S_{n\cdot 1}^k(\omega)$ तथा $S_{n\cdot 2}^k(\omega)$ का वर्ग आकलन समान होगा। अत: $S_{n\cdot 1}^k(\omega)$ का मान ज्ञात करना ही पर्याप्त होगा। यह ज्ञात है कि

$$\int_{-\infty}^{\omega}(\omega-t)^{-3/2}\{e^{i(m+1)\omega}-e^{i(m+1)t}\}dt=2\,\Gamma\tfrac{1}{2}(m+1)^{1/2}\,e^{i(m+1)\omega}\,.\,e^{i\pi}$$

अत: $$(m+1)^{1/2}\,e^{i(m+1)\omega}=\frac{e^{-i\pi/2}}{2\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\omega}(\omega-t)^{-3/2}\{e^{i(m+1)\omega}-e^{i(m+1)t}\}\,dt$$

यह मान $S_{n\cdot 1}^k(\omega)$ के मान में रखने पर

$$S_{n\cdot 1}^k(\omega)=\cos\frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})}\right)\left(A_n^k\right)^{-1}R_e\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-n}\ e^{-i\pi}\int_{-\infty}^{\pi}(\omega-t)^{-3/2}$$

$$\times\{e^{i(m+1)\omega}-e^{i(m+1)t}\}\,dt$$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{2\Gamma\frac{1}{2}}\right)R_e\left(e^{-i\pi/2}\int_{-\infty}^{\omega}(\omega-t)^{-3/2}\sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-1}\right.$$

$$\left.\times\{e^{i(m+1)\omega}-e^{i(m+1)t}\}\,dt\right]$$

उपर्युक्त में $(\omega-t)=u$ रखने पर

$$\int_0^\infty u^{-3/2} \sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-1} \left\{e^{i(m+1)\omega} - e^{i(m+1)(\omega-u)}\right\} du$$

$$=\int_0^\infty u^{-3/2} \sum_{m=1}^{n} A_m^{k-1} \left\{e^{i(n-m+1)\omega} - e^{i(n-m+1)(\omega-u)}\right\} du$$

$$=e^{i(n+1)\omega} I(\omega).$$

जहाँ पर

$$I(\omega)=\int_0^\infty u^{-3/2}[K_n(\omega)-e^{i(n+1)u}K_n(\omega-u)]\, du$$

तथा
$$K_n(y)=\sum_{m=1}^{n} A_m^{k-1} \, . \, e^{imy}$$

अतः
$$S_{n.1}^{k}(\omega)=\frac{\cos 3\pi/4}{2\Gamma(\frac{1}{2})}\left(A_n^k\right)^{-1} R\,[e^{-i\pi}\, e^{i(n+1)\omega}\, I(\omega)] \tag{4.6}$$

हमें यह ज्ञात है कि डुप्लेसिस[1]

$$K_n(y)=O(n^k)$$

$$=O(y^{-k}),\ 1/n \leqslant y \leqslant \pi$$

$$K_u'(y)=O(n^{k+1})$$

$$=O(n^k \, . \, y^{-1}),\ 1/n \leqslant y \leqslant \pi$$

अब हम लिखेंगे

$$I(\omega)=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

$$I_1=\int_0^{1/n} u^{-3/2}\,[K_n(\omega)-e^{-i(n+1)u}\,K_n(\omega-u)]\, du$$

$$=O\left[\int_0^{1/n} u^{-1/2}\left\{\frac{d}{d\xi}\, e^{i(n+1)\xi}\, K_n(\omega-\xi)\right\} du\right],\ 0 \leqslant \xi \leqslant u$$

$$=O\left[\int_0^{1/n} u^{-1/2}\,\{n(\omega-\xi)^{-k}+n^k(\omega-\xi)^{-1}\}\, du\right]$$

$$=O(n^{1/2}\omega^{-k})$$

$$I_2=\int_{1/2}^{\infty} u^{-3/2}\ K(\omega)\ du$$

$$=-\int_{1/n}^{\infty} u^{-3/2}\ K_n(\omega)\ du$$

$$=O(n^{1/2}\ .\ \omega^{-k})$$

$$I_3=-\int_{1/n}^{\omega-1/n} u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K_n(\omega-u)\ du$$

$$=O\left[\int_{1/2}^{\omega-1/2} u^{-3/2}\,(\omega-u)^{-k}du\right]$$

$$=O(n^{1/2}\ \omega^{-k}) \tag{4.9}$$

इसी प्रकार

$$I_4=O(n^{1/2}\ \omega^{-k})$$

अब

$$I_5=-\int_{\omega+1/n}^{\infty} u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K_n(\omega-u)du$$

$$=\int_{\omega+1/n}^{\infty} u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K_n(\omega-u)\ du$$

$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} u^{-3/2}\ e^{i(n+1)u}\ K_n(\omega-u)\ du$$

$$=O\left[\int_{\omega+1/n}^{\pi} u^{-3/2}\,(u-\omega)^{-k}\ du\right]+\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)u}K_n(\omega-u)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2(m+1)3m\pi}$$

$$\times(u+2m\pi)^{-3/2}\ du$$

$$=(n^{1/2}\ \omega^{-k})+O\left[\int_{\pi}^{\omega-1/n}(\omega-u)^{k}du+\int_{\omega-1/n}^{\omega+1/n} n^{k}\,du+\int_{\omega+1/n}^{\pi}(u-\omega)^{-k}du\right]$$

$$=O(n^{1/2}\omega^{-k}) \tag{4.11}$$

समीकरण (4.7) से (4.11) तक की सहायता से

$$I(\omega)=O(n^{1/2}\ \omega^{-k})$$

हम लिखेंगे

$$I(\omega+\mu_n)-I(\omega)=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5$$

$$J_1=\int_0^{1/n} u^{-3/2}[\{K_n(\omega+\mu_n)-e^{-i(n+1)u}K_n(\omega+\mu_n-u)\}$$

$$-\{K_n(\omega)-e^{-i(n+1)u}K_n(\omega-u)\}]du$$

$$=\mu_n\int_0^{1/n}U^{-3/2}\Big[K'_n(t)-e^{-i(n+1)u}\ K'_n(t+u)\Big]\,du,\ \omega\leqslant t\leqslant\omega+\mu_n$$

$$=\mu_n\int_0^{1/n}u^{-1/3}\Big[\frac{d}{d\xi}\{e^{-i(n+1)\xi}K'_n(t+\xi)\}\Big]\,du\ ,\ 0\leqslant\xi\leqslant u$$

$$=O\left[\mu_n\int_0^{1/2}u^{-1/2}\,n^{k+1}\omega^{-1}\,du\right]$$

$$=O(n^{k-1/2}\omega^{-1}) \tag{4.13}$$

$$J_2=\int_{1/n}^{\infty}u^{-3/2}[K_n(\omega+\mu_n)-K_n(\omega)]du$$

$$=O(n^{k-1/2}\omega^{-1}) \tag{4.14}$$

$$J_3=-\int_{1/n}^{\omega-1/n}u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K_n(\omega+\mu_n-u)-K_n(\omega+\mu_n)\ du$$

$$=O\left[\mu_n\int_{1/n}^{\omega-1/n}u^{-3/2}\,K'_n\,(\omega-u)\ du\right]$$

$$=O\left[n^{k-1}\int_{1/n}^{\omega-1/n}u^{-3/2}\,(\omega-u)^{-1}\ du\right]$$

$$=O(n^{k-1/2}\ \omega^{-1}\log n) \tag{4.15}$$

$$J_4=-\mu_n\int_{\omega-1/n}^{\omega+1/n}u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K'_n\,(\omega-u)\ du$$

$$=O(n^{k-1/2}\ \omega^{-1}) \tag{4.16}$$

$$J_5=-\mu_n\int_{\omega+1/n}^{\pi}u^{-3/2}\ e^{-i(n+1)u}\ K'_n\,(\omega-u)\ du$$

$$-\mu_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n+1)u}\ K'_n\ (\omega-u)\left[\sum_{m=1}^{\infty}e^{-i(n+1)2m\pi}\ (u+2m\pi)^{-3/2}\right]du$$

$$=O\left[\mu_n\int_{\omega+1/n}^{\pi}u^{-3/2}n^k\,(n-\omega)^{-1}du\right]+O(1)$$

$$=O(n^{k-1/2}\ \omega^{-1}\log n) \tag{4.17}$$

समीकरण (4.12) से (4.17) तक की सहायता से

$$I(\omega+\mu_n)-I(\omega)=O(n^{k-1/2}\,\omega^{-1}\log n)$$

5. प्रमेय की उपपत्ति : श्रेणी (2.1) का बिन्दु (θ, ϕ) पर चिजारो माध्य

$$\overset{k}{\sigma}_n=\left(\overset{k}{A}_n\right)^{-1}\int_0^{\pi}\sin\omega\cos\omega\,\phi(\omega)\sum_{m=1}^{n}\overset{k-1}{A}_{n-m}\,\delta_n P_m(\cos\omega)\,d\omega$$

जहाँ

$$\delta_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\;\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(n+\beta+1)}$$

$$\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot n^{\alpha+1}$$

अब हम लिखेंगे

$$\overset{k}{\sigma}_n=\int_0^{1/n}+\int_{\lambda n}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}$$

$$A+B+C \tag{5.1}$$

$$A=\left(\overset{k}{A}_n\right)^{-1}\int_0^{\lambda n}\omega\,.\,O(\omega^{1/2-k-1/p})\,O(n^{2+k})\,d\omega$$

$$=o\left(n^2\lambda_n^{5/2-k-1/p}\right)$$

$$=o(1)$$

$$C=O(n^{-k})\int_0^{1/n}\omega\,|\,\phi\,(\pi-\omega)\,|\sum_{n=1}^{m}(n-m)^{k-1}\,.\,m\,d\omega$$

$$=O\,(n^2)\lambda_n^{5/2-k-1/p}$$

$$=o(1) \tag{5.2}$$

$$B=\left(\overset{k}{A}_n\right)^{-1}\int_{\lambda n}^{\pi-1/n}(\sin\omega/2)\,(\cos\omega/2)\phi(\omega)\sum_{m=1}^{n}\overset{k-1}{A}_{n-m}\,m\,.\,1/\sqrt{\pi}\,m^{-1/2}\,(\sin\omega/2)^{-3/2}$$

$$\times(\cos\omega/2)^{-1/2}\left[\cos\left\{(m+1)\omega-\frac{3\pi}{4}\right\}+\frac{O(1)}{m\sin\omega}\right]$$

$$=\left(\sqrt{\pi}\, A_n^k\right)^{-1}\int_{\lambda n}^{\pi-1/n} (\sin \omega/2(^{-1/2}) \cos (\omega/2)^{1/2} (\phi\omega) \sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{k-1}\, m^{+1/2} \cos\Big\{(m+1)\omega - \frac{3\pi}{4}\Big\}\, d\omega$$

$$+O\,(n^{-k})\int_{\lambda_n}^{\pi-1/n} (\sin \omega/2)^{-3/2}(\cos \omega/2)^{-1/2}\,|\,\phi(\omega)\,|\sum_{m=1}^{n} A_{m-n}^{k-1}\; m^{-1/2}\, d\omega$$

$$=\pi^{-1/2}\int_{\lambda n}^{\pi-1/n} (\sin \omega/2)^{-1/2} (\cos \omega/2)^{1/2}\, \phi(\omega)\,.\, S_n^k(\omega)\, d\omega$$

$$+O\,(n^{-1/2})\int_{\lambda n}^{\pi-1/n} (\sin \omega/2)^{-3/2} (\cos \omega/2)^{-1/2}\,|\,\phi(\omega)\,|\, d\omega$$

$$=B_1+B_2 \tag{5.4}$$

$$B_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_{\lambda n}^{\pi-1/n} (\sin \omega/2)^{-1/2} (\cos \omega/2)^{1/2}\, \phi(\omega)\, \psi\,(\omega)\; e^{2(n+1)\omega}\, d\omega$$

$$-\int_{\lambda n-\mu n}^{\pi-1/n-\mu n}\left(\sin\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{1/2}\phi(\omega+\mu_n)(\omega+\mu_n)\; e^{i(n+1)\omega}\, d\omega\Big|,$$

$$\mu_n=\pi/n+1$$

अतः

$$B_1\leqslant 1/\sqrt{\pi}\;(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5) \tag{5.5}$$

$$I_1=\int_{\lambda n-\mu n}^{\lambda n}\Big|\left(\sin\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)\phi(\omega+\mu_n)(\omega+\mu_n)\;|d\omega$$

$$=o(n^{1/2-k})\int_{\lambda n-\mu n}^{\lambda n} \omega^{-1/2-k}\,.\,\omega^{1/2-k-1/p}\, d\omega$$

$$=o(1) \tag{5.6}$$

$$I_2=\int_{\pi-\lambda n-\mu n}^{\pi-1/n}|\,(\sin \omega/2)^{-1/2} (\cos \omega/2)^{1/2}\, \phi)\omega)\, \psi\,(\omega)\,|\, d\omega$$

$$=O(n^{-1/2-k})$$

$$=O(1) \tag{5.7}$$

$$I_3=\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}|\,\phi(\omega+\mu_n)-\phi(\omega)\,.\,\left(\sin\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{1/2}\psi(\omega+\mu_n)\,|\, d\omega$$

$$=O\,(n^{1/2-k})\left(\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}|\,\phi(\omega+\mu_n)-\phi(\omega)\,|^p\,d\omega\right)^{1/p}$$

$$\times\left(\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}(\omega^{-1/2-k})^q\,d\omega\right)^{1/q},\ 1/p+1/q=1$$

$$=O(n^{-k+1/2})\left\{(0\left(\mu_n{}^{1/2-k}\right)\left(O(1)+\lambda_n^{1/2-k-1/p}\right)\right\}$$

$$=o(1) \tag{5.8}$$

$$I_4=\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\lambda n}|\{(\omega+\mu_n)-\psi(\omega)\}\,\phi(\omega)\,|\left(\sin\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{1/2}d\omega$$

$$=O(n^{-1/2}\log n)\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}\omega^{-1}\,.\,\omega^{-1/2}\,O(\omega^{1/2-k-1/p})\,d\omega$$

$$=O(1) \tag{5.9}$$

$$I_5=O\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}\left|\left(\sin\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\omega+\mu_n}{2}\right)^{1/2}-(\sin\omega/2)^{-1/2}(\cos\omega/2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\phi(\omega)\psi(\omega)\right|d\omega$$

$$=O(\mu_n)(n^{1/2-k})\int_{\lambda n}^{\pi-1/n-\mu n}\omega^{-3/2-k}\,O(\omega^{1/2-k})\,d\omega$$

$$=o(1)$$

आकलन (5.6) से (5.10) तक एकत्रित करने पर

$$B_1=o(1) \tag{5.11}$$

$$B_2=O(n^{-1/2})\int_0^{\pi-1/n}\omega^{-3/2}\,\omega^{1/2-k-1/p}\,d\omega$$

$$=o(1) \tag{5.12}$$

अतः प्रमेय पूर्णरूपेण स्थापित हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० बी० के० व्योहार के मार्गदर्शन के लिए हम उनके आभारी हैं।

निर्देश

1. डुप्लेसिस, एन०, J.L.M.S., 1952, 337-352

2. कागबितलियान्त्ज, ई०, Mathèmatiques Jourdè Math, 1924, 107-187.

3. पाण्डे, जी० एस०, I. J. M., 1968, 121-155.

4. जैगो, जी०, Amer. Math. Soc. Colleq Publ. 1959, न्यूयार्क ।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 53-59

साम्यवत् फीलेक प्रतिरूप तथा अन्तःकेन्द्रित जटिल धातुओं में जालकीय कम्पन

आर० एन० खन्ना तथा आर० पी० एस० राठौर
भौतिकी विभाग, राजा बलवन्त सिंह कालेज, आगरा

[प्राप्त—जुलाई 10,1980]

सारांश

प्रस्तुत पत्र में फीलेक प्रतिरूप को (अ) आयन-कोरों के बीच एवं आवरणकों के मध्य कार्यकारी बलों (ब) आयतनीय-बलों एवं (स) साम्य-प्रतिबन्ध के लिये परिवर्द्धित किया गया है। इस परिवर्द्धित प्रतिरूप को टंगस्टन में विक्षेपण वक्रों के परिकलन हेतु प्रयुक्त किया गया है तथा वक्रों को तत्सम्बन्धित प्रायोगिक आँकड़ों से अभितुलित किया गया है।

Abstract

Equilibrised Fielek model and lattice vibrations in BCC complex metals. *By* R.N. Khanna and R. P. S. Rathore, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

Fielek model is modified for (a) core-core and d shell-d shell interaction, (b) volume interactions and (c) equilibrium condition. The modified version is employed to derive dispersion relations in tungsten, which are compared with the corresponding measured data.

1. प्रस्तावना: जालकीय गतिकी सम्बन्धी अध्ययन में दो मुख्य धारायें प्रचलित हैं। प्रथम धारा के अनुयायी आभासी विभव[1-2] विधि का अनुसरण करते हैं। द्वितीय धारा पर आधारित अध्ययन घटनीय प्रतिरूपों[3-4] को महत्व देते हैं। जटिल धातुओं में विद्यमान *d*-एवं *f*-इलेक्ट्रानों की रिक्त कक्षाओं के कारण इन धातुओं के लिये प्रथम विधि संदेहास्पद, कठिन एवं धातु-भौतिकता से परे होने के कारण दुरूह और अस्पष्ट हो जाती है। घटनीय-प्रतिरूप धातुओं के विभिन्न अवयवों में क्रियान्वित प्रतिक्रिया-बलों को मध्यमान रूप में प्रकट करते हैं। फीलेक[5] प्रतिरूप, बीच का मार्ग अपना कर, जटिल धातुओं के विभिन्न अवयवों अर्थात् आयन-कोरों, *d*-आवरणकों एवं चालन इलेक्ट्रानों को आत्मिक एवं पारस्परिक रूप से आबद्ध करने

वाले बलों को यथोचित महत्व प्रदान करता है। इस प्रतिरूप एवं इसके प्रयुक्त रूपों[6–10] में अग्रलिखित कमियाँ ध्यान देने योग्य हैं।

(अ) आयन-कारों एवं d-आवरणकों के मध्य कार्यकारी केन्द्रीय-विभव के द्वितीय-अवकलजों को ही फीलेक-प्रतिरूप में स्थान दिया गया है। प्रथम-अवकलजों को शून्य मानना स्पष्टतः एक भ्रान्ति मात्र है क्योंकि क्रिस्टलीय-साम्य के लिये इन विभवों के अतिरिक्त चालन-इलेक्ट्रानों की ऊर्जा भी उत्तरदायी होती है।

(ब) फीलेक-प्रतिरूप में आयन कोरों एवं चालन इलेक्ट्रोनों के मध्य उपस्थित आयतन-बलों को शून्य माना जाता है। यथार्थ में इलेक्ट्रानों की विभिन्न ऊर्जायें, आयन-कोरों के विस्थापन के प्रत्युत्तर-स्वरूप उद्वेलित होती हैं। अतः इन ऊर्जाओं से उत्पन्न आयतन-बलों का प्रतिरूप में उचित समावेश आवश्यक प्रतीत होता है।

(स) फीलेक-प्रतिरूप में क्रिस्टलीय साम्य सम्बन्धी समस्या का युक्तिसंगत एवं निकाय-जनित समाधान प्रस्तुत नहीं किया गया है। इस समस्या से सम्बन्धित फीलेक द्वारा प्रतिपादित सैद्धान्तिक-विवेचन[11] भी कुछ भ्रान्तियों[12] से परिपूर्ण होते हुये गणन की दृष्टि से कठिन एवं वास्तविकता से कुछ दूर हटता सा प्रतीत होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में फीलेक प्रतिरूप को उपरोक्त भ्रान्तियों के लिये संशोधित करने का प्रयास किया गया है। संशोधित प्रतिरूप आयनों के मध्य एवं d-आवरणकों के मध्य कार्यरत केन्द्रीय-युग्मन विभव के प्रथम एवं द्वितीय दोनों ही अवकलजों को निकटस्थ-प्रतिवेशी तक प्रभावी मानता है। केन्द्रीय युग्मन बलों की धारणा प्रथम-सैद्धान्तिक-विवेचन सम्बन्धी द्वितीय क्रम के क्षुब्धन सन्निकटन के अनुरूप ही हैं। इस धारणा को फुक्स[13] के दृढ़ सैद्धान्तिक-साहित्य से बल मिलता है। इन बलों को निकटस्थ-पड़ोसी तक सीमित करने का कारण रेजोल्ट आदि[14] तथा डिजेन आदि[15] के शोध-पत्रों से सुस्पष्ट हो जाता है।

प्रस्तुत लेख में आयन कोरों एवं इलेक्ट्रोनों (चालन एवं d-आवरणकों पर विद्यमान) के मध्य विद्यमान आयतन-बलों को क्रैब्स[16] प्रणाली में व्यक्त न कर भाटिया[17] प्रणाली में व्यक्त किया गया है। क्रैब्स[16] की प्रणाली प्रथम तो आवरणांक प्राचल (K_c) को प्रारम्भ में आयतन-मुक्त मानकर चलती है तथा तदुपरांत उसे आयतन पर निर्भर मान लेती है। दूसरे यह प्रणाली चालन इलेक्ट्रानों को केवल फर्मी-ऊर्जा-युक्त पूर्णतः स्वतन्त्र गैस मानती है। तीसरे इस प्रणाली द्वारा आयतन-बलों की भूमिका जालकीय-विक्षेपण में पन्द्रह प्रतिशत तक ही सीमित रहती है। चौथे एवं अन्तिम सन्दर्भ में इस प्रणाली में गणना अनिवार्यतः कम्प्यूटर द्वारा होती है जिसमें अपेक्षाकृत अधिक समय तथा अर्थ नियोजित रहता है। भाटिया[17] प्रणाली को अधिक व्यापक एवं युक्तिसंगत बनाने के लिये आवरणांक प्राचल को बोह्म-पाइन्स[18] सन्निकटन में उद्धृत किया गया है। इस प्राचल को चालन इलेक्ट्रानों की स्थितिज एवं सह-सम्बन्धी ऊर्जाओं से सम्बन्धित करने के लिये उपयुक्त परा-वैद्युत-गुणक [$\epsilon(\vec{q})$] को भाटिया[17]-व्यंजक में उचित स्थान दिया गया है। वारडनिस्थिरांक (G^2) के भी परिमाणु-कोष्ठिका के वास्तविक स्वरूप के लिये मूल्यांकित किया गया है। इन संशोधनों के फलस्वरूप गणनीय दृष्टि से सरल, आत्म-संगत एवं वस्तुपरक भाटिया[1] प्रणाली आयतन-बलों का सक्षम विवेचन प्रस्तुत करती है।

क्रिस्टलीय साम्य को प्रस्तुत प्रपत्र आयन कोरों, d-आवरणकों एवं चालन-इलेक्ट्रानों की विभिन्न आयतन-ऊर्जाओं के अन्तर्गत आत्म-पोषिक रूप में प्रस्तुत किया गया है। इस प्रकार परिवर्द्धित प्रतिरूप द्वारा टंगस्टन के लिये विक्षेपण-वक्रों का प्रतिपादन किया गया है जिसे मूल्यांकित करने के लिये प्रायोगिक वक्रों से तुल्यता को भी दर्शाया गया है।

2. **सैद्धान्तिक-विवेचन** : विक्षेपण आवृतियों (ν) को प्राप्त करने के लिये निम्नलिखित सारणीयक को हल किया जा सकता है

$$|D(\vec{q})-4\pi^2 m\nu^2 I|=0 \tag{1}$$

जहाँ m आयन कोर की संहति है। I एकिक-मेट्रिक्स है। गतिकी-मेट्रिक्स $D(\vec{q})$ के अवयवों को निकटस्थ आयन कोरों के मध्य विद्यमान केन्द्रित-युग्मन विभव के प्रथम अवकलज (α_1) एवं द्वितीय अवकलज (β_1) तथा आवश्यक प्राचलों के माध्यम से निम्नलिखित भाँति व्यक्त किया जाता है

$$D_{ii}(\vec{q})=-\frac{8}{3}(\beta_1+\alpha_1)(1-C_iC_jC_k)+K+AM_{ii}+\frac{K^2}{N} \tag{2}$$

$$D_{ij}(\vec{q})=-\frac{8}{3}(\beta_1-\alpha_1)S_iS_jC_k$$

जहाँ C_i=कोज्या ($\frac{1}{2}aq_i$), S_i=ज्या ($\frac{1}{2}aq_i$), a जालक-स्थिराँक है। जालकीय-कम्पन क्वांटम अर्थात् फोनोन के तरंग-वेक्टर ($\vec{q}$) का i वां अवयव q_i है। आयन कोर एवं d-आवरणकों के बीच आबद्धता प्राचल K में अन्तर्निहित है। आयन-कोरों के विस्थापन के प्रत्युत्तर स्वरूप चालन इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध निरूपक-प्राचल A है। गतिकी-मेट्रिक्स-अवयव (m_{ii}) तत्सम्बन्धित आयतन-बलों से उत्पादित होते हैं जिन्हें परिवर्द्धित भाटिया व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है अर्थात्

$$M_{ii}=\frac{q_i^2\epsilon(\vec{q})K_c^2\Omega G^2}{a[\epsilon(\vec{q})K_c^2+|q|^2]} \tag{3}$$

जहाँ आवरणक-प्राचल K_c को वोह्ना-पाइन्स[18] सीमा में अवमूल्यित किया गया है। परावैद्युत फलन $\epsilon(\vec{q})$ को निम्न-प्रकार व्यक्त किया जाता है।

$$\epsilon(\vec{q})=\epsilon_H(\vec{q})[1-S(\vec{q})] \tag{4}$$

जहाँ $\epsilon_H(\vec{q})$ हार्टी द्वारा प्रतिपादित फलन है तथा $S(\vec{q})$ एक **संशोधन-पद** है जो इलेक्ट्रानों की विनिमय एवं सह-संबन्धी ऊर्जाओं से व्युत्पन्न है तथा इस पद को सिंग्वी आदि [19] द्वारा प्रदत्त समीकरण से अवमूल्यित किया गया है।

वारडीन-गुणक (G^2) को वास्तविक बहुभुज के आयतन Ω के लिये निम्नांकित समीकरण द्वारा प्राप्त किया जाता है

$$G^2=\int_0^{\Omega}\exp.\,(i.\,\vec{q}.\vec{r})d\Omega/\Omega \tag{5}$$

समीकरण (2) में प्रयुक्त पद N को अग्रलिखित सारणीयक द्वारा प्राप्त किया जाता है

$$|D'(\vec{q})-NI|=0 \tag{6}$$

जहाँ $D'(\vec{q})$ गतिकी-मेट्रिक्स के अग्रलिखित अवयव, d-आवरणकों की अपने इर्द-गिर्द उपस्थित अन्य घटकों से पारस्परिक-क्रिया के फलस्वरूप उत्पन्न होते हैं।

$$D'_{ii}(\vec{q})=\frac{8}{3}(\beta_1'+\alpha_1')(1-C_iC_jC_k)+K+A'\,M_{ii}$$

$$D'_{ij}(\vec{q})=\frac{8}{3}(\beta'_1-\alpha'_1)S_iS_jK_k \tag{7}$$

जहाँ α'_1 तथा β'_1 क्रमशः d-आवरणकों के मध्य कार्यरत केन्द्रीय-युग्मन विभव के क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय अवकलज हैं। A' d-आवरणकों तथा चालन इलेक्ट्रानों के मध्य आयतन-प्रक्रिया से व्युत्पन्न विरूपक प्राचल है।

सम्पूर्ण जालक की साम्यावस्था के लिये सम्पूर्ण ऊर्जा (E) को आयनकोरों की ऊर्जा (E_c), d-आवरणकों की ऊर्जा (E_d) तथा चालन इलेक्ट्रानों की ऊर्जा (E_e) के योग के रूप में लिखा जाता है।

$$E=E_c+E_d+E_e \tag{8}$$

क्रिस्टलीय साम्य हेतु

$$\frac{\partial E}{\partial \Omega}=0 \tag{9}$$

अर्थात्

$$\frac{\partial E_c}{\partial \Omega}=-\frac{\partial}{\partial \Omega}(E_d+E_e) \tag{10}$$

समीकरण (10) को निम्न भाँति लिखा सकता है। यही अपेक्षित साम्य-समीकरण है

$$\alpha_1+\alpha'_1=-\frac{a}{2}P_e \tag{11}$$

जहाँ

$$P_e=-\frac{\partial E_e}{\partial \Omega} \tag{12}$$

इलेक्ट्रान ऊर्जा E_e में फर्मी, विनिमय तथा सहसम्बन्धी प्रभाग सम्मिलित है। इस सम्बन्ध में लेखकों के इस समूह ने विस्तृत-विवरण अन्यत्र[20] प्रस्तुत किया है। इस विवरण से इलेक्ट्रान अन्तराल 3 के P_e का मान उद्धृत किया गया है। विरूपक-प्राचल A को निम्नलिखित सूत्र से अवमूलियत किया जाता है

$$A=-a\Omega\frac{\partial P_e}{\partial \Omega} \tag{13}$$

3. गणना एवं परिणाम : प्रस्तुत प्रतिरूप में सात $(\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1, K, A, A')$ प्राचल हैं। इनमें से दो का मान समीकरण (11) एवं (13) द्वारा प्राप्त किया जाता है। शेष प्राचलों को निम्नलिखित समीकरणों द्वारा प्राप्त किया जाता है।

$$ac_{11}=-\frac{2}{3}(\beta_1+2\alpha_1)+A+A'+\frac{2}{3}(\beta'_1+\alpha'_1)$$

$$ac_{12}=\frac{8}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\beta_1+A+A'-\frac{8}{3}\alpha'_1+\frac{2}{3}\beta'_1$$

$$ac_{44}=-\frac{2}{3}(2\alpha_1+\beta_1)+\frac{2}{3}(2\alpha'_1+\beta'_1) \tag{14}$$

$$4\pi^2 m\nu_T^2[\zeta 00]=-\frac{16}{3}(\beta_2+2\alpha_1)-K+\frac{K^2}{K+16/3(\beta'_1+2\alpha'_1)}$$

$$4\pi^2 m\nu_{T_1}^2[\zeta\zeta 0]=-8\alpha_1-K+\frac{K^2}{K+8\alpha'_1}$$

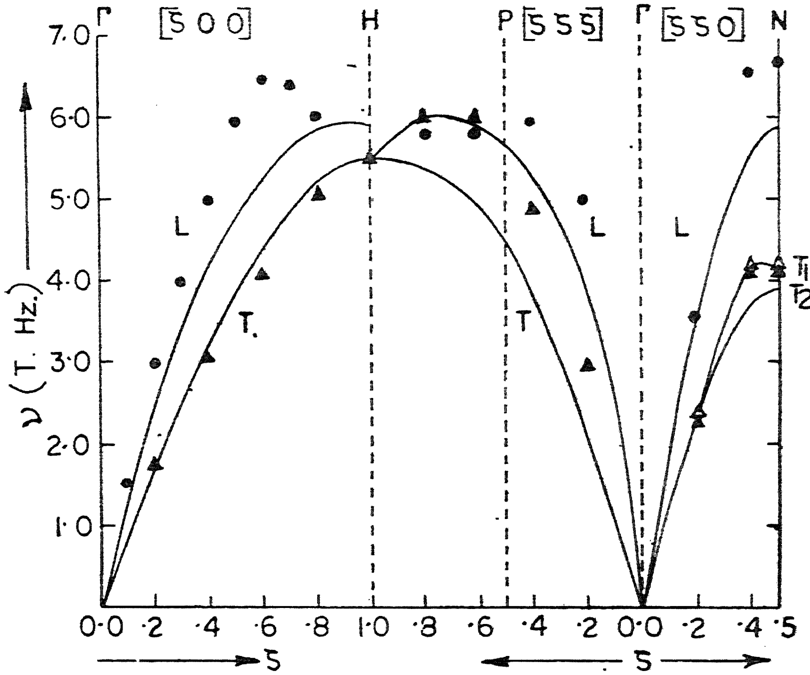


FIG. I. DISPERSION CURVE FOR TUNGSTEN

चित्र 1: टंगस्टन के लिये विक्षेपण वक्र, (—) प्रस्तुत प्रतिरूप से प्राप्त, (●, ●, △) लेरोज तथा ब्रोकहौज द्वारा मापी गई आवृतियां।

सारणी 1 में, टंगस्टन के विक्षेपण वक्रों को परिकलित करने के लिए आवश्यंक आँकड़े एवं परिकलित प्रतिरूप प्राचल, रचना-बद्ध किये गये हैं। विक्षेपण वक्रों को दिये गये चित्र 1 में ठोस रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है। लेरोज एवं ब्रोकहौज[21] द्वारा मापित प्रयोगिक विक्षेपण-आवृतियाँ इस चित्र में बिन्दुओं (●, △, △) द्वारा दर्शाई गई हैं।

4. **उपसंहार** : प्रस्तुत प्रतिरूप द्वारा [ζ00] में अनुदैर्घ्य कम्पनों के लिये उत्पादित आवृतियाँ जोन-सीमा के पास प्रयोगिक मापों से कुछ नीची प्राप्त होती हैं। इसका कारण भाटिया[17] व्यजंक का जाना पहिचाना असमिताकार स्वरूप है। [ζζζ] दिशा में अनुप्रस्थ कम्पन भी प्रायोगिक आँकड़ों से कुछ हटे हुए हैं। इस हटाव का कारण अ-संनादी प्रभाव हो सकता है।

चित्र 1 से स्पष्ट है कि टंगस्टन के विक्षेपण वक्रों के प्राय: सभी लक्षण प्रस्तुत फीलेक-प्रतिरूप से प्रतिपादित हो जाते हैं। अत: प्रतिपादित प्रतिरूप, टंगस्टन जैसी जटिल धातुओं में जालकीय कम्पनों के लिये उत्तरदायी विभिन्न अवयवी-बलों को वस्तु-परक एवं आत्म-अविरोधी रूप में प्रस्तुत करता है।

सारणी 1 : टंगस्टन के लिये आवश्यक आँकड़े एवं परिकलित प्राचल

आँकड़े	प्राचल (10^4 डायन/से० मी०)
$*C_{11}=5{\cdot}2327$ ⎫	$\alpha_1=-1{\cdot}0137$
$*C_{12}=2{\cdot}0453$ ⎬ 10^{12} Dyne/cm^2	$\beta_1=-5{\cdot}2642$
$*C_{44}=1{\cdot}6072$ ⎭	$\alpha'_1=1{\cdot}5047$
$a=3{\cdot}16\ A^\circ$	$\beta'_1=-2{\cdot}6832$
$\nu_T[\zeta 00]=5{\cdot}5$ ⎫ T . Hz	$K=-6{\cdot}0451$
$\nu_T[\zeta\zeta 0]=4{\cdot}1$ ⎭	$A=0{\cdot}3393$
$m=305{\cdot}191\times10^{-24}$gm	$A'=11{\cdot}118$

*फीदरसन एवं नैबर्स[22]

निर्देश

1. ओली, बी० ए० तथा एनीमालू, ए० ओ० ई०, **फिज० रिव०**, 1976 , **B-13**, 2398
2. वर्मा, सी० एम० तथा वैबर, डब्ल्यू, **फिज० रिव० लै०**, 1967, **39**, 1094
3. राठौर, आर० पी० एस०, **इंडि० जर्न० फिज०**, 1977; **51 A**, 108
4. राठौर, आर० पी० एस० तथा वर्मा, एम० पी०, **इंडि० जर्न० फिज०** 1976, **50**, 605

5. फीलेक, बी० एल०, **जर्न० फिज०**, 1975, **F–5**, 17

6. जानी, ए० आर० तथा गोहिल, बी०, **जर्न० फिज०** 1976, **F–6, L–25**

7. सिंह, बी० पी० तथा हेमकर, एम० पी०, **नेवों सीमेंन्टो**, 1976, **50 B**, 134

8. सिंह, बी०पी०, पाठक, एल०पी०तथा हेमकर, एम०पी०, **जर्न०फिज०सोसा०जापान**, 1978, **45**, 484

9. सिंह, बी० पी० तथा हेमकर, एम० पी०, **जी० नेचरीफो**, 1976, **A 34**, 310

10. सिंह, बी० पी०, पाठक, एल० पी० तथा हेमकर, एम० पी०, **जर्न० फिज**, 1978, **F–8**, 2493

11. फीलेक, बी० एल०, **जर्न० फिज** 1978, **F–8**, 577

12. शुक्ला, एम० एम०, **जर्न० फिज०**, 1978, **F–8, L–289**
फीलेक, बी० एल०, **जर्न० फिज०**, 1978, **F–8, L–283**

13. फुक्स, के०, **प्रोसी० रो० सी० लन्दन**, 1936, **A 157**, 444

14. रेजोल्ट जे० एम० तथा टेलर, आर०, **फिज० रिब०** 1975, **B–11**, 1717

15. डिजेन्स, एल, रेजोल्ट, जे० एम० तथा टेलर, आर०, **फिज० रिब०** 1975, **B–11**, 2726

16. क्रैव्स, के०, **फिज० रिब०** 1965, **138**, **A**, 143

17. भाटिया, ए० बी०, **फिज० रिब०** 1955, **97**, 363

18. बोहम, डी० तथा पाइन्स, डी०, **फिज० रिब०** 1953, **92**, 609

19. सिंग्वी, के० एम०, स्जोलेन्डर, ए०, टोसी, एम०पी० तथा लैंड, आर० एच०, **फिज० रिब०**, 1970, **B–1**, 1044

20. राठौर, आर० पी० एस० तथा अग्रवाल, आर० एम०, **फिज० स्टेट० सोलिडी**, 1980, **(b) 97**, 597

21. लेरोज, ए० तथा ब्रोकहौंज बी० एन०, **कैनाडा जर्न० फिज०** 1971, **94**, 705

22. फीदरसन, एफ० एस० तथा नैबर्स, जे० आर०, **फिज० रिब०**, 1963, **130**, 1324

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January 1981, Pages 61-66

1-ऐमीनो-2-नेफ्थॉल-4-सल्फोनिक अम्ल (ANSA) के साथ धात्विक यौगिकों का अध्ययन

कु० सरिता श्रीवास्तव तथा पुरुषोत्तम बी० चक्रवर्ती
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अप्रैल 7, 1980]

सारांश

ऐमीनो नेफ्थॉल और इनके व्युत्पन्न कैंसर उत्पन्न करने वाले अणु पाये गये हैं। क्योंकि, कैंसर की उत्पत्ति और इसके निवारण, दोनो में संकुलन की क्रिया महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है, अतः 1- ऐमीनो-2- नेफ्थॉल-4-सल्फोनिक अम्ल की विभिन्न धातु आयनों के साथ अभिक्रियाओं तथा बनने वाले धात्विक-यौगिकों का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। चालकतामापी एवं पी-एच मापी अध्ययन बताते हैं कि इस यौगिक के साथ, Ca (II) तथा Mg (II) के समान जैविक दृष्टि से महत्वपूर्ण एवं Fe (III), Al (III), Cr (III), Cu (II), Ni (II) आदि कैंसर उत्पादक आयन 1 : 1 तथा 1 : 2 (M : L) भारश; अनुपात में यौगिक बनाते हैं। यौगिकों की विलेयता एवं प्रकृति का अध्ययन भी किया गया है।

Abstract

A study of metallic compounds with 1-amino 2-napthol 4-sulphonic acid (ANSA). *By* Km Sarita Srivastava and P. B. Chakravarty, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal

A detailed study on the reaction products formed as a result of reaction of 1-amino-2-napthol-4-sulphonic acid with various metal ions has been made.

कैंसर की उत्पत्ति एवं निवारण दोनों में संकुलन का उपयोग बताया गया है[1]। शरीर में सूक्ष्म परिमाण में उपस्थित धातुएँ सामान्यतः संक्रमण-धातुएँ होती हैं। ये असामान्य-धातुएं, ऐन्जाइम-निकायों से आवश्यक धातुओं को विस्थापित करके स्वयं संयोजित हो जाती हैं और उनका व्यवहार बदल देती हैं। इसी प्रकार, न्यूक्लिइक अम्ल से संयोजित होकर, उनकी संरचना में भी ये परिवर्तन कर देती हैं। ये परिवर्तन कैंसर उत्पत्ति का कारण बन जाते हैं। वे अणु जो कैंसर उत्पन्न करते हैं, सभी, मूलरूप से अथवा उपापचयी परिवर्तनों के बाद, धातु-आयनों से संकुल बनाने की क्षमता रखते हैं। ऐमीनो नेफ्थॉल और इनके व्युत्पन्न भी ऐसे ही यौगिक हैं। 1- ऐमीनो-2-नेफ्थाल-4-सल्फोनिक अम्ल (ANSA) इस दृष्टि से महत्वपूर्ण है। यह हल्के गुलाबी रंग का, गर्म जल में अल्पविलेय यौगिक है। इस शोधपत्र में, इस अणु की

विभिन्न धातु-आयनों के साथ क्रियाशीलता एवं बनने वाले यौगिकों की विलेयता तथा स्वभाव का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। जैविक दृष्टि से महत्वपूर्ण Ca (II), Mg (II) तथा Mn (II) और Fe (III), Al (III), Cr (III), Be(II), Co (II), Ni (II) तथा Cu (II) आदि कैंसर-उत्पन्न करने वाले धातु-आयनों के साथ बनने वाले यौगिकों का भारशः अनुपात चालकता एवं पी-एच मापी विधियों से निकाला गया है।

प्रयोगात्मक

गुणात्मक अध्ययन के लिये, कोबाल्ट, निकल, लोह, ऐलुमिनियम, मैंगनीज, ताँबा, क्रोमियम, लेड, मैग्नीशियम, जिंक, सिल्वर (रजत), टिन, बेरिलियम, जिर्कोनियम, वैनेडियम, इन्डियम, मरकरी, कैल्सियम, थैलियम, टाइटेनियम, मोलिब्डेनम तथा थोरियम के उच्च शुद्धता वाले जल-विलेय लवण उपयोग में लाये गये। ANSA (BDH) के डाइऑक्सेन में तथा सोडियम हाइड्रॉक्साइड की न्यूनतम मात्रा में बने विलयन (0·1M) उपयोग में लाये गये।

धातु-आयन एवं ANSA की अभिक्रिया के अध्ययन के लिये निम्नलिखित विलयनों में होने वाले परिवर्तन (a) ठंडे में, (b) गर्म करने पर तथा (c) रखने पर देखे गये [प्रत्येक प्रयोग में बनने वाले अवक्षेप की विलेयता अकार्बनिक विलायकों में देखी गयी] :

(I) धातु- आयन विलयन (0·1M) + धीरे-धीरे ANSA विलयन (1 : 3 अनुपात)

(II) धातु आयन विलयन + ANSA विलयन + NH_4OH (1 : 2 अनुपात)

(III) धातु आयन विलयन + ANSA विलयन + HCl (2-5 N) (1 : 1 अनुपात)

(IV) धातु आयन विलयन + ANSA विलयन + क्षार (NaOH) (0·2M, 1 : 2 अनुपात)

उपर्युक्त अध्ययनों में प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

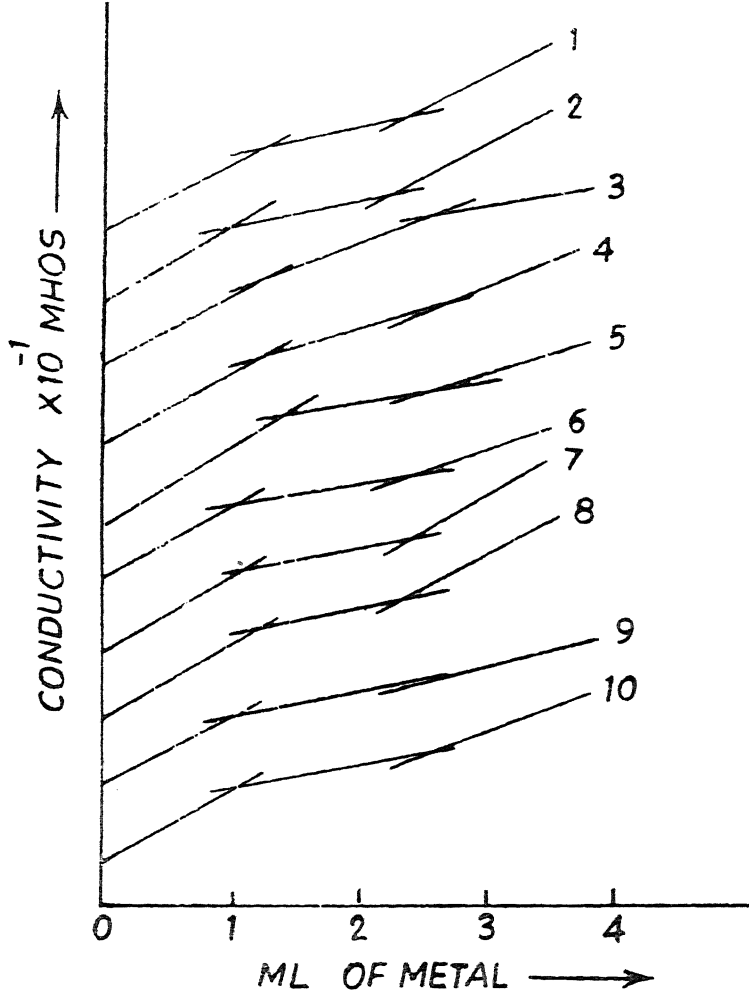
Pb (II), Mg (II), Zn (II), Ag (I), V(IV), In (III), Tl(I), तथा Ca (II) ANSA-विलयन मिलाते ही (तत्काल) अवक्षेप दे देते हैं अन्यथा अभिक्रिया गर्म करने पर तेजी से होती है। क्षारीय माध्यम (अमोनियाकृत तथा क्षारीय) में प्रयोग लाये गये सभी आयन ANSA-विलयन के साथ अवक्षेप बना देते हैं। अपवादस्वरूप, Pb (II), Al (III) के अवक्षेप क्षार के आधिक्य में विलेय तथा In(III) तथा Be (II) के अवक्षेप अल्प-विलेय पाये गये।

अधिकांश अवक्षेप अम्ल में विलेय थे, किन्तु Ca (II), Zn (II), Zr (IV), Be (II), Ti (IV), Co (II), Ag (I), Cr (III) तथा Mo (VI) के यौगिक अम्ल में अविलेय पाये गये। Mg(II) यौगिक, ठंडे में, अम्ल में अविलेय किन्तु गर्म अवस्था में विलेय पाया गया।

भारशः अनुपातमिति

भारशः अनुपात निर्धारण के लिये चालकतामापी अनुमापन WTW, LBR, जर्मनी का डूबने वाले चालकतामापी सेल वाला चालकतामापी-ब्रिज उपयोग में लाया गया। इस हेतु 10 मिली० ANSA-विलयन

(डाइऑक्सेन में, 0·01M) को 50 मिली० तक तनु कराने के बाद, 0·01M सान्द्रता के धातु विलयन द्वारा अनुमापित किया गया। 0·5 मिली० धातु विलयन मिलाने के बाद, प्रत्येक बार, विलयन की चालकता ज्ञात की गयी एवं तनुकरण-प्रभाव के लिये सुधार किया गया। चालकता एवं धातु-विलयनों के आयतनों के मध्य खींचे गये वक्र (चित्र 1) (M : L) 1 : 1 तथा 1 : 2 यौगिकों का निर्माण दर्शाते हैं।



चित्र 1 ANSA की धातुओं के साथ भारशः अनुपातमिति

1. Cu^{++} 2. Co^{++} 3. Ni^{++} 4. Mn^{++} 5. Be^{++}
6. Mg^{++} 7. Ca^{++} 8. Cr^{+++} 9. Fe^{+++} 10. Al^{+++}

सारणी 1

ANSA के धात्विक यौगिकों का अध्ययन

आयन	ANSA के साथ बने यौगिक का रंग	विलेयता		विशेष
		अकार्बनिक विलायक	कार्बनिक विलायक	
1	2	3	4	5
Fe (II)	हरा	HCl, HNO_3 में विलेय, क्षार में अविलेय	बेन्जीन में अल्प विलेय, मेथिल, एथिल, ऐमिल ऐल्कोहलों, ईथर, ऐसीटोन, क्लोरोफॉर्म में अविलेय	350°C तक अगलनीय
Co (II)	लाल-हरा	HCl तथा क्षार में अविलेय; HNO_3 में विलेय	ऐसीटोन, ईथर एवं मेथिल तथा एथिल ऐल्कोहलों में गर्म करने पर विलेय	,,
Ni (II)	हरा	,,	एथिल ऐल्कोहल में विलेय; गर्म मेथिल ऐल्कोहल एवं गर्म ऐसीटोन में धीरे-धीरे विलेय	,,
Mn (II)	भूरा	HCl तथा HNO_3 में विलेय, क्षार में अविलेय	मेथिल एवं एथिल ऐल्कोहल एवं क्लोरोफार्म में अल्प विलेय	,,
Cu (II)	भूरा	,,	मेथिल, एथिल एवं ऐमिल ऐल्कोहलों तथा बेन्जीन में अल्पविलेय	क्षार में अवक्षेप का रंग हरा हो जाता है; 350°C तक अगलनीय
Pb (II)	लाल	HCl, HNO_3 तथा क्षार में विलेय	ऐमिल ऐल्कोहल में विलेय, ऐसीटोन में अल्प-विलेय	350°C तक अगलनीय

(क्रमशः)

1	2	3	4	5
Zn (II)	लाल	HCl में अल्पविलेय, HNO_3 में विलेय तथा क्षार में अविलेय	ऐसीटोन में विलेय	,, क्षार में अवक्षेप का रंग हरा हो जाता है
Sn (II)	लाल-भूरा	HCl तथा HNO_3 में विलेय; क्षार में अविलेय	ऐसीटोन तथा एथिल ऐल्कोहल में विलेय	350°C तक अगलनीय
Hg (II)	भूरा	,,	ऐसीटोन में विलेय	,, क्षार में अवक्षेप का रंग पीला हो जाता है
Be (II)	हरा	HCl तथा क्षार में अविलेय; HNO_3 में विलेय	,,	350°C तक अगलनीय
Mg (II)	हरा	HCl तथा क्षार में अविलेय; HNO_3 में विलेय	ऐसीटोन में विलेय	550°C तक अगलनीय
Ca (II)	लाल	,,	ऐसीटोन, मेथिल एवं एथिल ऐल्कोहलों में अल्पविलेय	,,
Ag (I)	हरा	HCl तथा HNO_3 में विलेय; क्षार में अविलेय	ईथर और ऐमिल ऐल्कोहल में अल्पविलेय	,,
Tl (I)	हल्का हरा	,,	ऐमिल ऐल्कोहल में अल्पविलेय	,, क्षार में अवक्षेप का रंग नीला हो जाता है
Fe (III)	लाल	,,	ऐसीटोन में अल्पविलेय	350°C तक अगलनीय
Cr (III)	हरा-नीला	HCl तथा क्षार में अविलेय, HNO_3 में विलेय	क्लोरोफॉर्म, मेथिल तथा एथिल ऐल्कोहलों में अल्पविलेय	,, HCl में गुलाबी तथा क्षार में अवक्षेप हरा हो जाता है

(क्रमशः)

1	2	3	4	5
Al (III)	हरा-भूरा	HCl, HNO_3 तथा क्षार के आधिक्य में विलेय	ऐसीटोन तथा मेथिल एवं एथिल ऐल्कोहलों में अल्पविलेय	350°C तक अगलनीय
Ti (III)	हरा	HCl तथा क्षार में अविलेय; HNO_3 में विलेय	ऐसीटोन एवं ऐल्कोहल में विलेय	,,
Zr (IV)	हरा	,,	ऐमिल ऐल्कोहल में अल्प-विलेय	,,
Th (IV)	हरा	HCl तथा HNO_3 में विलेय, क्षार में अविलेय	ऐमिल ऐल्कोहल एवं एथिल ऐल्कोहल में विलेय	,,
V (IV)	हरा	,,	एथिल ऐल्कोहल में विलेय	,,
Mo (VI)	लाल-भूरा	HCl तथा क्षार में अविलेय; HNO_3 में विलेय	ऐसीटोन, एथिल तथा ऐमिल ऐल्कोहलों में विलेय	,,

पी-एच० मापी अनुमापनों के लिये 'सिस्ट्रोनिक्स' का, क्र० 322, ग्लास-कैलोमेल इलेक्ट्रोडों वाला पी-एच-मापी उपयोग में लाया गया। एकपरिवर्तन विधि[2] से धातु आयनों एवं ANSA के बीच, 1 : 1 तथा 1 : 2, दो संकुलों की पुष्टि होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (कु० श्रीवास्तव) शोध छात्रवृत्ति के लिये सी०एस०आई०आर० नई दिल्ली की आभारी है। आवश्यक सुविधा एवं सुझाव देने के लिये लेखक मो० वि० महा० के प्राचार्य डॉ० नेने के हृदय से आभारी हैं।

निर्देश

1. वेल्स, **ऐन० न्यू० एके० साइं०**, 1950, **50**, 1202
2. नायर, एम० आर० तथा पान्डे, सी० एस०, **प्रोसी० इन्डि० एके०साइं०**, 1948, **27 A**, 284

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 67-71

हैलोजन विस्थापित हाइड्राक्सीक्विनोलिन-धातु कीलेटों का अवरक्त स्पेक्ट्रम

कु० अलका मित्तल, अ०द० केलकर, हरीश गंगाराडे, जी०वी० घोलप
रसायन विज्ञान विभाग, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—अगस्त 21, 1979]

सारांश

बेरियम (II), मैग्नीशियम (II) और कैडमियम (II) के 5-क्लोरो, 7-आयोडो, 8-हाइड्राक्सी क्विनोलिन (CIHQ) संकुल का तुलनात्मक अध्ययन उनके अवरक्त स्पेक्ट्रम के द्वारा किया गया है। संकुल संरचना की पुष्टि इनके भौतिक एवं रासायनिक गुणों के आधार पर भी की गई है।

Abstract

Infra red spectra of halogen substituted 8-hydroxy quinoline metal chelates. *By* Miss Alka Mittal, A.D. Kelkar, Harish Gangrade, G.V. Gholap, Department of Chemistry, Holkar Science College, Indore

5- chloro,7-iodo,8-hydroxy quinoline complexes with barium (II), magnesium (II) and cadmium (II)have been compared with ligand itself through their ir studies. The structures of these complexes have been assigned on the basis of their physico-chemical properties.

सेन तथा उमापथी[1] ने 8-हाइड्राक्सी क्विनोलिन के टाइटेनियम के साथ संकुल बनाकर उनके अवरक्त वर्णक्रम की जानकारी दी है। प्रस्तुत शोधपत्र में भी विभिन्न धातुओं के CIHQ के साथ कीलेट संकुल बनाते हुए उनके अवरक्त वर्णक्रम वर्णित गये हैं।

प्रयोगात्मक

उपयोग में आने वाले समस्त रसायन ऐनालार-मानक के थे।

संकुल के संयोजन हेतु धातु लवण के द्विक आसवित चालकतामापी जल में विलयन को CIHQ के ऐसीटोन में विलयन के साथ विभिन्न आण्विक अनुपात में मिलाकर दो घंटे तक उबाला गया। परिणामस्वरूप प्राप्त हुए संकुल को छानकर एवं ऐसीटोन-जल के मिश्रण से धोकर सुखाया गया।

धातु, कार्बन, हाइड्रोजन और नाइट्रोजन का विश्लेषण प्रमाणित रीतियों से किया गया। हैलोजन डि-जांग[2] रीति द्वारा विश्लेषित की गई।

सारणी 1

संकुलों के विश्लेषणात्मक मान

संकुल	संकुल का सूत्र	रंग	धातु% वांछित	धातु% प्राप्त
Ba-CIHQ	$(C_9H_4IClON)_2Ba$	सफेद	17.557	19.0
Mg-CIHQ	$(C_9H_4IClON)_2Mg$	सफेद	3.6335	3.915
Cd-CIHQ	$(C_9H_4IClON)_2Cd$	पीला	14.841	14.167

	N%		Cl%		I%	
	वांछित	प्राप्त	वांछित	प्राप्त	वांछित	प्राप्त
Ba-CIHQ	3.579	3.75	9.075	8.88	32.465	31.67
Mg-CIHQ	4 183	4.23	10.607	11.61	37.949	40.22
Cd.CIHQ	3.696	3.655	9.374	9.688	33.535	35.0

विवेचना

बेरियम, मैग्नीशियम और कैडमियम के CIHQ संकुलों (1:2) के विश्लेषणात्मक परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं। धातु और लिगैन्ड के बीच के 1:2 के अनुपात को इनके थर्मोग्रैवीमितीय विश्लेषणों से भी सिद्ध किया गया है, जिनके परिणाम शीघ्र ही प्रकाशित किये जायेंगे।

शुद्ध और सूखे संकुलों के अवरक्त वर्णक्रम न्यूजाल के साथ पर्किन एल्मर मॉडल 577 पर लिए गए है।

सारणी 2 में बेरियम, मैग्नीशियम और कैडमियम के CIHQ संकुलो के अवरक्त वर्णक्रम के विभिन्न अवशोषण बैन्ड और उनकी विभिन्न संभावनाओं को दिया गया है। विभिन्न बैन्डों की तीव्रता को दर्शाने के लिये सामान्य सूत्रों (प्रबल, मध्यम, कमजोर और अत्यन्त कमजोर) का उपयोग किया गया है।

तीनों संकुलों में 3200 से 3500 cm^{-1} पर मध्यम तीव्रता का चौड़ा बैंड उप-सहसंयोजक जल की पुष्टि करता है जबकि लिगैन्ड में ऐसा कोई अवशोषण बैंड नहीं है।

लिगैन्ड और धातु कीलेटों में 1202 और 1200 Cm^{-1} पर क्रमश: तीव्र और मध्यम तीव्रता के बैन्ड मिलते हैं। लिगैन्ड में हाइड्रोजन बन्धित वलय तंत्र की C-O स्ट्रेचिंग तथा कीलेटों में C-O अवशोषण के कारण ये बैन्ड संभवतया आते हैं। तीव्रता का उस प्रकार तीव्र से मध्यम श्रेणी में आना तथा आवृत्ति का थोड़ा सा कम होना शायद धातु-ऑक्सीजन बन्धन के कारण है। [11,12]

सारणी 2

CIHQ	Ba	Mg	Cd	असाइनमेन्ट
3650 म	—	—		मुक्त-OH-स्ट्रेच C-61
—	3200 से 3500 म	3200 से 3500 म	3200 से 3500 म	सहसंयोजन जल के कारण[3]
—	2050 अक	2055 अक	2050 अक	संभवतया C-N और M-O की संयुक्त आवृत्ति
--	1650 क	1650 क	1650 क	C=N स्ट्रेच [4,5]
1355 से 1385 प्र	1360 प्र	1370 प्र	1370 प्र	C-N स्ट्रेचिंग और न्यूजोल के कारण [6,7]
1202 प्र	1200 म	1200 म	1200 म	फीनालिक C-O स्ट्रेचिंग एन०-226
812 म	810 क	810 क	810 क	1-2-4 त्रिविस्थापित बेंजीन व्युत्पन्न में C-H बैंड [8,9]
785 म	785 क	780 क	780 क	C-CI अवशोषण (इक्वेटोरियल पर) बी-331
—	670अ क	670अ क	670 अक	संभावितM-Oसंयुग्म[10]
500 क	500 क	500 क	500 क	C-I अवशोषण बी-580
--	440 से 460 म	440 से 460 म	440 से 460 म	M-N स्ट्रेचिंग[10]

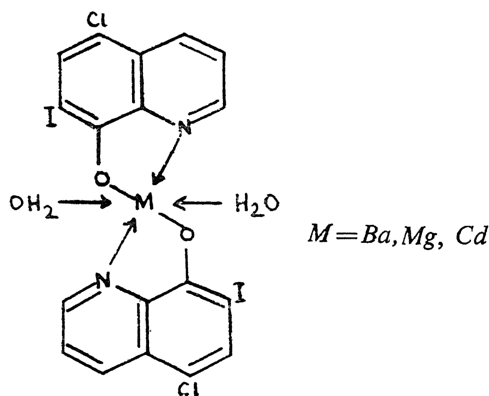
सी०-क्रास, बी०-बैलेमी, एन०-नाकामोटो

1650 cm^{-1} पर कमजोर आवृत्ति का बैन्ड जोकि सिर्फ संकुलों में है, C=N स्ट्रेचिंग के कारण हो सकता है ।

670 cm^{-1} पर अत्यन्त कमजोर बैन्ड जोकि सिर्फ संकुलों में ही है, M-O संयुग्म के कारण संभावित है। इसी प्रकार 1360±10 cm^{-1} पर स्ट्रेचिंग और न्यूजाल के कारण प्रबल तीव्रता का बैन्ड आता है । इन दोनों की संयुक्त आवृत्ति ही संभवतया 2250 cm^{-1} पर प्राप्त होती है ।

C-CI अवशोषण 780±5 cm^{-1}पर, C-I अवशोषण 500 cm^{-1} पर प्राप्त होता है । M-N अवशोषण 440-450 cm^{-1} पर सिर्फ संकुलों में ही प्राप्त होता है ।

उपरोक्त वर्णित तथ्यों के आधार पर धातु CIHQ संकुलों की सामान्य रचना निम्न प्रकार से की जा सकती है ।



M=Ba,Mg, Cd

लिगैन्ड और धातु कीलेटों के जीवाण्विक गुण हमारे पूर्व-प्रकाशन में प्रस्तुत किये जा चुके हैं । [13]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका (अ०मि०) इन्दौर विश्वविद्यालय की, शोध छात्रवृत्ति हेतु एवं प्राचार्य, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय की सुविधाएं प्रदान करने हेतु आभारी है ।

निर्देश

1. सेन, डी०एन० तथा उमापथी, पी०, जर्न० **इंडियन केमि० सोसा०**, 1968 **45**, 11,
2. डीजाग, जे०सी०, **फार्म वीक्वल** 1937, **74**, 608.
3. जुन्नोसुक फुजिता, नाकामोटो के० तथा कोबायाशी, एम० **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1956, **78**, 3963
4. हर्जबर्ग, जी०, इन्फ्रारेड एन्ड रमन स्प्रेक्ट्रा आफ पालीऐटामिक मालेक्यूल्स, वाननास्ट्रेन्ड न्यूयार्क 1945, पृष्ठ, 118, 362.

5. मेरिअन लिओ, रेमसे, डी० ए० तथा जान्स आर०एन०, **जर्न० अमेरि० केमि० सोसा०** 1951, **73** 305.

6. टेबी, पी०, तथा चैरेटी, जे० जे०, **स्पेक्ट्रोकिम एक्टा**, 1963, **19**, 1407

7. क्लौघेर्टी, एल०ई०, सोसा, जे०ए० तथा वाइमन, जी०एम०, **जर्न०आर्गे० केमि०**,1957, **22**, 462

8. चार्ल्स, आर० सी०, फ्रेजर, एच०, फ्रेडल, आर०, हिलिआर्ड, एल०ई० तथा जानस्टन, डब्ल्यू० डी० **स्प्रेक्ट्रोकिम० एक्टा** 1956, **1**, 8

9. शीर, आई०, नेस, डब्ल्यू० आर० तथा स्मेल्टजर, पी० बी०, **जर्न०अमे०केमि० सोसा०**, 1955, **77**, 3300.

10. यूनो, के०, मार्टेल, ए० ई० तथा क्लीवलेन्ड, एफ०एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1941, **63**, 3500

11. यूनो, के०, तथा मार्टेल, ए०ई०, **जर्न० फिजि० केमि०** 1955, **59**, 998.

12. यूनो, के० तथा मार्टेल, ए० ई०, **जर्न० फिजि० केमि०**, 1956, **60**, 1270.

13. मित्तल, अलका, केलकर, ए०डी० तथा घोलप, जी० वी०, **केमि० एन्ड पेट्रोकेमि० जर्न०** 1978, **9-10**, 20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 73-75

ओज़ोनित्र विसर्जन के दौरान हाइड्रोजन में कोरोना दाब तथा धनात्मक जोशी प्रभावों का तुलनात्मक अध्ययन

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त–नवम्बर 1, 1980]

सारांश

ओज़ोनित्र विसर्जन के दौरान हाइड्रोजन के 1–500 मिमी (पारद) 30°C दाब परिसर में कोरोना दाब प्रभाव $\triangle p$ तथा जोशी प्रभाव $\triangle i$ के परिमापन किये गये। हाइड्रोजन के 120 मिमी दाब से नीचे परिमाप्य $\triangle p$ का अवलोकन नहीं हुआ। 120 मिमी से ऊपर प्राप्त $\triangle p$ तथा $+\triangle i$ की सह-उपस्थिति का, उपलब्ध सीमित विभव परिसर में, विभिन्न दाबों पर अध्ययन किया गया। $+\triangle i$ का परिमाण 1–3% था जबकि उसी विभव परिसर में, $\triangle p$ का मान 0·20–1·10 मिमी था। विभिन्न विभवों पर, अंधकार व प्रकाश में $\triangle p$ के परिमापन से ज्ञात हुआ कि $+(\triangle p)_L$ की अपेक्षा $+(\triangle p)_D$ तनिक अधिक और $-\triangle p$ से $+\triangle p$ अधिक होता है। प्राप्त परिणामों से सिद्ध हुआ है कि $+\triangle i$ आयनी गतिशीलता में वृद्धि के साथ संगुणित होता है।

Abstract

Comparative studies of corona pressure effect and positive Joshi effect in hydrogen under ozonizer discharge. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Measurements of the corona pressure effect $\triangle p$ and Joshi effect $\triangle i$ were carried out in the pressure range 1–500 mm *Hg* 30°C in hydrogen under ozonizer discharge. No measurable $\triangle p$ was observed below $pH_2 = 120$ mm. The co-occurrence of $\triangle p$ and $+\triangle i$ obtained above 120 mm was studied at different pressures over the limited potential range possible. The magnitude of $+\triangle i$ was 1–3%, whereas that of $\triangle p$ was 0.20–1.10 mm in the same potentials in dark and in light showed that $+(\triangle p)_D$ was slightly greater than $+(\triangle p)_L$ and $+\triangle p$ was greater than $-\triangle p$. The results have shown that $+\triangle i$ is associated with an increase in the ionic mobility.

पूर्वप्रकाशित[1,2] अर्ध-ओज़ोनित्र विसर्जन में प्राप्त परिणाम प्रदर्शित करते हैं कि कोरोना दाब प्रभाव $\triangle p$ का परिमाण अल्प था और $\triangle p$ तथा ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\triangle i$ की सह-उपस्थिति एक सीमित विभव परिसर में थी। अधिक परिमाण का $\triangle p$ प्राप्त करने और हाइड्रोजन में $\triangle p$ तथा $\triangle i$ की सह-उपस्थिति के अनुकूल प्रतिबंधों को ज्ञात करने हेतु, प्रस्तुत अध्ययन के लिए बड़े आकार के एक पूर्ण-ओजोनित्र को छांटा गया।

प्रयोगात्मक

पूर्वप्रकाशित विधि[1,3] के अनुसार उत्पन्न हाइड्रोजन का शोधन व शुष्कन करके उसे, अभीष्ट दाब पर, सीमेन्ज प्रकार के पूर्ण-ओजोनित्र के निर्वातित वलयाकार स्थान में प्रविष्ट किया गया; दाब का प्रदर्शन पारद-दाबमापी करता था जिसका अभिलेखन 0.01 मिमी अल्पतमांक वाले एक कैथेटोमीटर के द्वारा होता था। ओज़ोनित्र की अन्दर वाली नली में सोडियम क्लोराइड विलयन भरा गया जिसमें उच्च विभव वाले ट्रान्सफ़ार्मर के एक सिरे से जुड़े ताँबे के तार को डुबाया गया। बाहर की नली पर दृढ़तापूर्वक लिपटे ताँबे के एक चमकदार तार को, जो कि निम्न विभव के इलेक्ट्रोड का कार्य करता है, एक परावर्तन धारामापी नामक धारा संसूचक के द्वारा भू संपर्कित किया गया। $\triangle i$ तथा $\triangle p$ के परिमापन हाइड्रोजन के 1-500 मिमी (पारद) 30°C दाब परिसर में किये गये।

परिणाम

हाइड्रोजन के 120 मिमी से कम दाब पर $\triangle p$ का अवलोकन नहीं हुआ। $\triangle p$ तथा $+\triangle i$ की सह-उपस्थिति pH_2=121, 145, 171, 244 व 306 मिमी पर प्राप्त हुई और वह भी प्रत्येक के एक सीमित विभव परिसर में। हाइड्रोजन के 145 मिमी दाब पर प्राप्त प्रेक्षणों को वर्तमान श्रृंखला के प्रारूपिक समुच्चय के रूप में यहाँ उद्धृत किया गया है। देहली विभव V_m पर $-\triangle i$ का परिमाण 17% था। आरोपित विभव की वृद्धि के साथ यह घटता गया और उच्च अनुप्रयुक्त क्षेत्रों पर इसका $+\triangle i$ में व्युत्क्रमण हो गया। 5.55−6.40 kV विभव परिसर में प्रेंक्षित $+\triangle i$ 1−3% था। इसी विभव परिसर में $\triangle p$ का परिमाण 0.42−0.50 मिमी था।

प्राप्त सार्थक परिणाम निम्नांकित हैं : $-\triangle p$ से $+\triangle p$ का अधिक होना; अनुप्रयुक्त विभव kV के साथ $+\triangle p$ के परिमाण का बढ़ना; pH_2=121, 145, 171, 244 तथा 306 मिमी पर $+\triangle i$ और $\triangle p$ की सह-उपस्थिति; $-\triangle i$ का $+\triangle i$ में व्युत्क्रमण।

उच्च गैस दाब परिसर 307−500 मिमी में $\triangle i$ तथा $\triangle p$ की सह-उपस्थिति का अवलोकन नहीं हुआ। 490 मिमी दाब पर, $\triangle p$ का महत्तम मान, 21.33 kV पर, 5.12 मिमी था। उच्च गैस दाबों पर $\triangle p$ के मानों से प्रकट होता है कि किसी नियत अनुप्रयुक्त विभव पर, $\triangle p$ का परिमाण गैस के दाब के साथ बढ़ता जाता है।

विवेचना

निम्न तथा उच्च उत्तेजक विभव, धनात्मक जोशी प्रभाव $+\triangle i$ के अनुकूल होते हैं[4]। V_m से नीचे, किरणन के द्वारा प्रकाशिक-इलेक्ट्रॉनों के संभरण के कारण आयनीकरण बढ़ जाता है जिससे कि

अस्वपोषित विसर्जन स्वपोषित हो जाता है। वे प्रकाशिक इलेक्ट्रॉन जो उदासीन गैस कणों से मिलकर ऋण आयन बनाने से बच निकलते हैं, वे प्रकाश में धारा i को बढ़ाते हैं। उच्चतर उत्तेजक विभवों पर, पर्याप्त उच्च ऊर्जा वाले इलेक्ट्रॉन जो ऋण आयनों की रोधिका को पार करने में समर्थ होते हैं, वे संघट्टन के कारण आयनीकरण के द्वारा द्वितीयक इलेक्ट्रॉनों की उत्पत्ति करते हैं। उच्च अनुप्रयुक्त क्षेत्रों में प्रेक्षित $+\triangle i$ के लिए ये ही इलेक्ट्रॉन उत्तरदायी हैं। $+\triangle i$ का $-\triangle i$ में व्युत्क्रमण पूर्णतः विभव-उत्क्रमणीय है। $+\triangle i$ अति उच्च आवृत्तियों में $-\triangle i$ के साथ ही उत्पन्न होता है[5], $-\triangle i$ साधारण उच्च आवृत्तियों के साथ संगुणित होता है। तो भी, जो इलेक्ट्रॉन ऋण आयनों की रोधिका को पार करते हैं उनकी संख्या और नैज $+\triangle i$ थोड़े ही होते हैं। अतः प्रस्तुत अध्ययन में $+\triangle i$ का परिमाण अत्यल्प था।

एक न्यूनतम विभव $V_{\triangle p}$ होता है जिसपर $\triangle p$ प्राप्त होता है। यह $V_{\triangle p}$ देहली विभव V_m के समान होता है, किन्तु V_m से $V_{\triangle p}$ अधिक होता है। V_m अस्वपोषित से स्वपोषित विसर्जन का द्योतक होता है; $V_{\triangle p}$ स्वपोषित विसर्जन क्षेत्र के अन्तर्गत स्थित होता है।

$+\triangle i$ तथा $\triangle p$ की सह-उपस्थिति की व्याख्या करने के लिए, टिन्डल-समीकरण, $\triangle p = i/4\pi k$ जबकि k औसत आयनी गतिशीलता है, का उपयोग करके, अंधकार व प्रकाश में आयनी गतिशीलता का परिकलन किया गया। 5.74 kV पर प्रेक्षित आँकड़े अधोलिखित हैं : $i_D=390$, $i_L=397$, $+\triangle i=7$, $+\%\triangle i=2$; $+(\triangle p)_D=0.50$, $+(\triangle p)_L=0.38$; $k_D=62.05$, $k_L=83.12$ तथा $k_L/k_D=1.34$. क्योंकि k_D तथा k_L के मान आपेक्षिक हैं, अतः निष्पत्ति k_L/k_D का परिणामों की व्याख्या के लिए उपयोग किया जा सकता है। परिकलनों से ज्ञात होता है कि, जिस विभव परिसर में $\triangle p$ प्राप्त होता है उसमें अंधकार की तुलना में, प्रकाश में आयनी गतिशीलता का मान अधिक होता है। अतः इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि $+\triangle i$ आयनी गतिशीलता की वृद्धि के साथ संगुणित होता है। इस प्रेक्षण से $\triangle i$ के लिए जोशी के सिद्धांत की संपुष्टि होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० गलगली का उनके अमूल्य सुझावों के लिए आभारी है।

निर्देश

1. प्रसाद, जे०, **बोले० सोसा० किम० पेरु**, (प्रेषित)
2. प्रसाद, जे०, **रिव० रुमेन किमि०**, 1979, **24**, 323
3. प्रसाद, जे०, **एक्टा सिएन्सिया इंडिका**, 1974, **1**, 13
4. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस**, 1947, **16**, 19
5. शुक्ला, बी०एम०, **जर्न० फिजि० कोला० केमि०**, 1949, **53**, 1239

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 1, January, 1981, Pages 77-79

H-फलन के लिए सर्वसमिकाएँ

ए० के० राठी
गणित विभाग, एस० बी० डी० गवर्नमेन्ट कालेज, सरदार शहर (राजस्थान)

[प्राप्त—अक्टूबर 13, 1979]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में H-फलन के लिए तीन सर्वसमिकाएँ प्राप्त की गई हैं।

Abstract

Indentities for H-function. *By* A. K. Rathie, Department of Mathematics, S.B.D. Government College, Sardar Shahr (Rajasthan).

In this note three identities for the H-function have derived.

1. विख्यात H-फलन को निम्नवत परिभाषित एवं अंकित किया जाता है :

$$H_{pq}^{mn}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right.\right]=(2\pi_i)^{-1}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-F_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+n}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}Z^s ds, \qquad (1.1)$$

जहाँ L मेथिल-बार्नीज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि H-फलन सार्थक होता है।

2. H-फलन के लिए निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ व्युत्पन्न की गई हैं :

$$H_{p+1,q+1}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p,(a,\lambda)\\ {}_1(b_j,f_j)_q,(a,\lambda)\end{matrix}\right.\right].$$

$$=(2\pi i)^{-1}\left\{e^{i\pi\alpha}\, H_{pq}^{mn}\left[z\,e^{-i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]-e^{-i\pi\alpha}\, H_{pq}^{mn}\left[z\,e^{i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]\right\}$$

जहाँ $n \leqslant p,\ m \leqslant q.$

$$e^{i\pi\alpha}\, H_{pq}^{mn}\left[z\,e^{i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$=\pi\left\{H_{p+1,q+1}^{mn}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p,\ (\tfrac{1}{2}-\alpha,\lambda)\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (\tfrac{1}{2}-\alpha,\lambda)\end{matrix}\right]+i\,H_{p+1,q+1}^{mn}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_p,\ (1-\alpha,\lambda)\\ {}_1(b_j,f_j)_q,\ (1-\alpha,\lambda)\end{matrix}\right]\right.$$

जहाँ $n \leqslant p,\ m \leqslant q.$

$$H_{pq}^{mn}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_{p-1},\ (\alpha+r,\lambda)\\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1},\ (\alpha+r,\lambda)\end{matrix}\right]=(-1)^r\, H_{pq}^{mn}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(a_j,e_j)_{p-1},\ (\alpha,\lambda)\\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1},\ (\alpha,\lambda)\end{matrix}\right] \quad (2.3)$$

जहाँ $n<p,\ m<q$ तथा r एक पूर्णांक है ।

उपपत्तियाँ

(2.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके बाईं ओर के H-फलन को मेलिन-बार्नीज समाकल के पदों में व्यक्त करते हैं और निम्नलिखित परिणामों का उपयोग करते हैं

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}=\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}=\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i}$$

थोड़े से सरलीकरण के बाद दो भागों में विलग करके और फिर (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर हमें (2.1) प्राप्त होगा ।

इसी प्रकार से निम्नलिखित परिणाम के उपयोग से (2.2) की प्राप्ति होगी ।

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)=\pi \sec \pi z \text{ तथा } \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\pi \operatorname{cosec} \pi z.$$

इसी प्रकार सम्बन्ध

$$\Gamma(\alpha-r)\,\Gamma(1-\alpha+r)=(-1)^r\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)$$

जहाँ r एक पूर्णांक है को उपयोग में लाने पर (2.3) प्राप्त होगा।

जब समस्त e_j, f_i तथा λ प्रत्येक इकाई हों, तो G-फलन के लिए संगत सर्वसमिका प्राप्त होगी।

यदि (2·1) में $m=q=2$, $n=p=0$, $z=x^2/4$, $a=-\frac{1}{2}-\nu/2$, $b_1=-\nu/2$, $b_2=\nu/2$, $f_1=f_2=1$, $\lambda=1$ लिया जाय तथा निर्देश [1, (46), (47), p. 219] का उपयोग करें तो

$$Y_\nu(x)=-1/\pi\,[e^{-i\pi\nu/2}K_\nu(x\,e^{-i\pi/2})+e^{i\pi\nu/2}K_\nu(x\,e^{i\pi/2})]$$

यह निर्देश [2, (8)p. 4] के समतुल्य है।

आगे यदि हम (2.2) में $m=q=2$, $n=p=0$, $z=x^2/4$, $a=1+\nu/2$, $b_1=-\nu/2$, $b_2=\nu/2$, $f_1=f_2=\lambda=1$ लें तथा निर्देश [1, (46), (47), and (44), p. 219] का उपयोग करें तो

$$-2\,e^{i\pi\nu/2}K_\nu(x\,e^{i\pi/2})=\pi[Y_\nu(x)+iJ_\nu(x)]$$

प्राप्त होगा जो निर्देश [2, (6), p. 4] के समतुल्य है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० के० सी० शर्मा ने जो रुचि ली उसके लिए लेखक उन्हें धन्यवाद देता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मकग्राहिल 1953

2. वही, Higher Transcendental Functions, भाग 2, मकग्राहिल 1953

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4Fe\overline{CN})_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकें।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

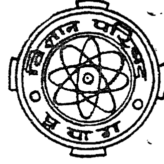
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 15 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० या 20 शि० या 4 डालर

Revised Rates

Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 15
Per Vol. Rs. 3 *or* 20 sh. *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
801229

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 24 | April 1981 | No. 2



The Reearch Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूचो

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 81-88

निकोटिनिक एवं आइसोनिकोटिनिक अम्लों से मोलिब्डेनम(VI) तथा टंग्सटन(VI) के कुछ द्विनाभिकीय संकरों का निर्माण एवं उनके अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन

(श्रीमती) रंजना सिंह तथा मनहरन नाथ श्रीवास्तव
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—फरवरी 21, 1980]

सारांश

निकोटिनिक तथा आइसोनिकोटिनिक अम्लों से अम्लीय माध्यम (pH$\sim$2.5—3.0) में Mo(VI) तथा W(VI) के कुछ प्रतिचुम्बकीय द्विनाभिकीय संकर [Mo_2O_4 L$(OH)_3$. H_2O] तथा [W_2O_4 L$(OH)_3$. H_2O]. nH_2O (L : निकोटिनेट अथवा आइसोनिकोटिनेट ऋणायन; तथा *n* का मान W(VI) के निकोटिनेट एवं आइसोनिकोटिनेट संकरों में क्रमशः 1 तथा 3 है) निर्मित किये गये हैं, एवं उनके अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन किया गया है। Mo(VI)-निकोटिनिक अम्ल निकाय में अवक्षेप तथा निस्यंद से दो प्रकार के संकर क्रमशः एक श्वेत अक्रिस्टलीय तथा दूसरा पीला क्रिस्टलीय, प्राप्त हुए, परन्तु अन्य निकायों से केवल एक ही प्रकार के श्वेत संकर प्राप्त हुये। अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययनों से स्पष्ट है कि इन संकरों में उपसहसंयोजन लिगैंड के पिरीडीन-N, तथा कार्बोक्सिलिक समूह, दोनों के द्वारा होता है। परन्तु चूँकि ये संकर द्विनाभिकीय (धातु : लिगैंड = 2 : 1) हैं, अतः इनमें ये लिगैंड एक सेतुबन्धी लिगैंड की भाँति व्यवहार करते हैं, और दो धातु केन्द्रों से संयुक्त हैं। इसके साथ ही सेतु बन्धन M—O—M बन्धों के द्वारा भी होता है। इसके अतिरिक्त OH^- समूह तथा जल के अणु भी उपसहसंयोजित हैं और इन द्विनाभिकीय संकरों की संरचना संभवतः षष्ठ उपसहसंयोजित अष्टफलकीय है।

Abstract

Synthesis and I. R. studies of some binuclear Mo(VI) and W(VI) complexes of nicotinic and isonicotinic acids. By (Mrs.) Ranjana Singh and M. N. Srivastava, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Some diamagnetic binuclear Mo(VI) and W(VI) complexes of nicotinic and isonicotinic acids, [Mo_2O_4 L$(OH)_3$. H_2O] and [W_2O_4 L$(OH)_3$. H_2O]. nH_2O (where

L :—nicotinate or isonicotinate anion, and n=1 in the W(VI)—nicotinate complex, and n=3 for the corresponding isonicotinate complex) have been prepared in the acidic medium (pH∼2.5–3.0) and characterised by their elemental analysis and I. R. spectra. From the Mo(VI) - nicotinic acid system, two complexes, the white amorphous and the yellow crystalline varieties, were isolated from the precipitate and filtrate respectively, whilst the rest systems have yielded only one type of white complexes. The I. R. studies have revealed that the coordination occurs through both, the pyridine-N, and the carboxylic group. But since the complexes are binuclear, with metal : ligand ratio as 2 : 1, the ligands are bridging in nature, bonded to two different metallic centres. Moreover, bridging also occurs through the M—O—M bonds, forming M_2O_4 units. Besides coordination also occurs from the OH^- groups and water, and the complexes are possibly six-coordinate and octahedral.

पिरीडीन के कार्बोक्सिलिक अम्ल व्युत्पन्न, निकोटिनिक तथा आइसोनिकोटिनिक अम्ल एवं उनके व्युत्पन्न अपने जैवरासायनिक अभिक्रियाओं [1-3] के कारण विशेष महत्व के हैं। ह्यूस, जेलीनेक तथा ऐम्ब्रोज[4] का विचार था कि निकोटिनिक अम्ल विलयन में उभयधर्मी आयन नहीं बनाता, परन्तु बाद में स्टीफेन्सन तथा स्पोनर[5] ने पराबैंगनी स्पेक्ट्रमी अध्ययनों से यह सिद्ध किया कि पिरीडीन के कार्बोक्सिलिक अम्ल विलयन में ज्विटर आयन बनाते हैं और इस तथ्य की पुष्टि टेलर[6] तथा वोजिक एवं स्टाक[7] ने भी की है।

निकोटिनिक तथा आइसोनिकोटिनिक अम्लों से कुछ संक्रमण धातुओं (Cu, Ni, Co, Zn, Mn आदि) के संकरों के निर्माण का अध्ययन अनेक पूर्ववर्ती कार्यकर्ता[8-10] कर चुके हैं। वाल्टन[11] ने Co(II) तथा Ni(II) के संकरों की संरचना का अध्ययन स्पेक्ट्रमी, चुम्बकीय एवं एक्सरे विश्लेषण विधियों के द्वारा किया। क्लाइन्सटीन एवं गाव[12] ने Cu(II), Ni(II) तथा Co(II) के संकरों के अवरक्त स्पेक्ट्रमों में γM—N आवृतियाँ 500—400 cm^{-1} के क्षेत्र में परिवेक्षित कीं। दत्त एवं चटर्जी[13] ने निकोटिनिक अम्ल से Mo(V) का एक नारंगी रंग का प्रतिचुम्बकीय संकर $[MoO_2 Nic]. 2H_2O$ प्राप्त किया, जो कि संभवतः द्वितयी है। प्रस्तुत प्रपत्र में निकोटिनिक तथा आइसोनिकोटिनिक अम्लों से अम्लीय माध्यम में Mo(VI) तथा W(VI) के कुछ द्विनाभिकीय संकरों के निर्माण तथा उनके अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक : सोडियम मोलिब्डेट (अनालार बी० डी० एच०), सोडियम टंग्सटेट (अनालार बी० डी० एच०), निकोटिनिक अम्ल (रीडेल), आइसोनिकोटिनिक अम्ल (रीडेल), परक्लोरिक अम्ल (रीडेल)।

धात्विक आयनों तथा लिगैंडों के विलयनों को 1 : 2 मोलर अनुपात में मिलाया गया तथा निश्चित विलयनों के पी-एच को परक्लोरिक अथवा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल की सहायता से लगभग 2.5-3.0 पी-एच

पर व्यवस्थित किया गया । Mo(VI)–निकोटिनिक अम्ल के मिश्रण को पहले एक विद्युती जलऊष्मक पर सान्द्रित करके कुछ समय के लिये कमरे के ताप पर छोड़ दिया गया । इस प्रकार उससे श्वेत तथा पीले दो प्रकार के पदार्थों का एक मिश्रण प्राप्त हुआ, जिनमें से पीला पदार्थ जल में विलेय था, परन्तु श्वेत पदार्थ अविलेय था । अतः उन्हें पृथक करने के लिये प्राप्त पदार्थ को छान कर गरम आसुत जल से खूब धोया गया, जिससे पीला पदार्थ पूर्ण रूप से विलेय होकर निस्यंद में चला गया । अवशेष श्वेत पदार्थ को पहले 50% ऐल्कोहल तथा बाद में परम शुद्ध ऐल्कोहल से धोकर निर्वात में सुखाया गया । निस्यंद तथा धोवनों को फिर जलऊष्मक पर वाष्पित किया गया तथा क्रिस्टलीकरण के लिये छोड़ दिया गया । इस प्रकार चमकीले पीले क्रिस्टल प्राप्त हुये और इन्हें भी छानकर पहले 50% ऐल्कोहल तथा बाद में परम शुद्ध ऐल्कोहल से धोकर निर्वात में सुखा लिया गया । इस प्रकार इस निकाय में अवक्षेप तथा निस्यंद से क्रमशः दो प्रकार के, श्वेत अक्रिस्टलीय तथा पीले क्रिस्टलीय, संकर प्राप्त हुये । Mo(VI)–आइसोनिकोटिनिक अम्ल के संकर का निर्माण भी उपरोक्त विधि द्वारा ही किया गया, परन्तु इस निकाय से केवल एक ही प्रकार का श्वेत पदार्थ प्राप्त हुआ ।

टंगसटन (VI)–लिगैंड मिश्रणों को pH व्यवस्थित करने के बाद बर्फ से ठंडे जल के कुण्ड में 2-3 घंटों के लिये रखा गया तथा इस प्रकार प्राप्त पदार्थों को छानकर पहले 50% ऐल्कोहल तथा बाद में परम शुद्ध ऐल्कोहल द्वारा धोकर सुखाया गया । प्राप्त पदार्थ श्वेत चूर्ण थे ।

इन संकरों के संघटन में जल की उपस्थिति को ज्ञात करने के लिये इन्हें वायु भट्टी में 100-110°C तथा 150-160°C पर क्रम से 2-2 घंटों तक गरम किया गया । इन प्रयोगों से प्राप्त परिणाम तथा इन संकरों के वैश्लेषिक आंकड़े (धातु, कार्बन, हाइड्रोजन, नाइट्रोजन तथा जल की क्षति) निम्नलिखित हैं, जिनके आधार पर इनके सूत्र दिये गये हैं ।

(i) Di-μ-OXO-μ-(nicotinato) trihydroxo monoaquo di [oxomolybdenum (VI)]

श्वेत, अक्रिस्टलीय, गलनांक 350°C, 150°C पर गरम करने पर जल की क्षति (~3.5%) $[Mo_2 O_4 L(OH)_3. H_2O]$ के लिए

परिकलित : Mo=42.95; C=16.11; H=2.01; N=3.13%

प्राप्त : Mo=42.98; C=16.32; H=2.08, N=3.38%

(ii) Di-μ-OXO-μ (nicotinato) trihydroxo monoaquo-di [oxomolybdenum (VI)] : पीला, क्रिस्टलीय, गलनांक 390°C, जल की कोई क्षति नहीं होती । $[Mo_2O_4 L(OH)_3. H_2O]$ के लिये

परिकलित : Mo=42.95, C=16.11, H=2.01, N=3.13%

प्राप्त : Mo=43.21, C=16.32, H=2.02, N=3.20%

(**टिप्पणी** : उपरोक्त आंकड़ों से स्पष्ट है कि Mo(VI)–निकोटिनिक अम्ल के दोनों प्रकार के (श्वेत तथा पीले) संकरों का संघटन एवं सूत्र एक ही है, परन्तु अन्तर उनके गुणधर्मों में है, जिसका कारण संभवतः उनकी विभिन्न संरचना है।)

(iii) Di-μ-OXO-μ (nicotinato) trihydroxo monoaquo-di [oxotungsten (VI)] monohydrate: श्वेत चूर्ण, गलनांक 370°C, 100-110°C पर गरम करने पर जल की क्षति (2.34%)। [W_2O_4 $L(OH)_3$. H_2O] के लिये

परिकलित : W=57.40, C=11.23, H=1.71, N=2.18%

प्राप्त : W=57.12, C=11.04, H=1.82, N=2.31%

(iv) Di-μ-OXO-μ (isonicotinato) trihydroxo-monoaquo-di [oxomolybdenum (VI)] : श्वेत, क्रिस्टलीय, गलनांक 360°C, गरम करने पर जल की कोई क्षति नहीं होती।

[Mo_2O_4 $L(OH)_3$. H_2O] के लिए

परिकलित : Mo=42.95, C=16.11, H=2.01, N=3.13%

प्राप्त : Mo=42.12, C=16.50, H=2.08, N=3.42%

(v) Di-μ-OXO-μ (isonicotinato) trihydroxo monoaquo-di [oxotungsten (VI)] trihydrate : श्वेत चूर्ण, गलनांक 360°C, गरम करने पर जल की क्षति 100-110°C पर (~2.7%)

[W_2O_4 $L(OH)_3$. H_2O]. $3H_2O$ के लिए

परिकलित : W=54.36, C=10.64, H=2.22, N=2.07%

प्राप्त : W=54.80, C=10.82, H=2.08. N=2.14%

इन संकरों तथा लिगैंडों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr-डिस्क विधि से पर्किन-एल्मर मॉडल 337 स्पेक्ट्रममापी द्वारा 4000—400cm^{-1} के क्षेत्र में प्राप्त किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

वैश्लेषिक आंकड़ों से यह स्पष्ट है कि Mo(VI) तथा W (VI) के इन सभी संकरों में धातु : लिगैंड का अनुपात 2 : 1 है, अर्थात् ये सभी द्विनाभिकीय संकर हैं।

अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययन : निकोटिनिक एवं आइसोनिकोटिनिक अम्ल दोनों ही ज्विटर आयन[5–7] की भाँति व्यवहार करते हैं, अतः इनके अवरक्त स्पेक्ट्रमों में पिरीडीन वलय तथा COOH समूह के साथ-साथ ज्विटर आयन संरचना के NH^+ तथा COO^- समूहों की भी लाक्षणिक आवृत्तियाँ पाई जानी चाहिये। सारणी 1 तथा 2 में बैंडों का निर्देश इसी आधार[14, 15] पर किया गया है।

निकोटिनिक तथा आइसोनिकोटिनिक अम्लों में COOH समूह की अवशोषण आवृत्ति ~1700cm⁻ पर प्राप्त होती है जो कि इनके Mo(VI) तथा W(VI) के संकरों में लुप्त हो जाती है। इसी प्रकार ज्विटर आयन संरचना के NH^+ समूह के कारण उत्पन्न आवृत्तियाँ (2360, 1865 cm^{-1}) भी संकरों में लुप्त हो जाती हैं। COO^- समूह की असममित तथा सममित तनन आवृत्तियाँ क्रमशः ~1600 तथा ~1400 cm^{-1} पर प्राप्त होती हैं। इन लिगैंडों में पिरीडीन वलय की तनन आवृत्तियाँ (γC=C एवं γC=N) 1600-1450 cm^{-1} के क्षेत्र में मिलती हैं (निकोटिनिक अम्ल : γC=C 1585 cm^{-1}, γC=N. 1572, 1475 cm^{-1}, आइसोनिकोटिनिक अम्ल : γC=C 1590 cm^{-1}, γC=N 1550, 1502 cm^{-1})। संकर निर्माण का γC=C आवृत्ति पर तो कोई विशेष प्रभाव दृष्टिगत नहीं होता, पर γC=N पर्याप्त रूप से निम्नतर हो जाती हैं। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि इन संकरों में सहसंयोजन लिगैंड के पिरीडीन–N तथा कार्बोक्सिलिक समूह दोनों के द्वारा होता है। परन्तु चूँकि इन संकरों में धातुः लिगैंड का अनुपात 2 : 1 है, अतः इनमें ये लिगैंड सम्भवतः सेतुबन्धी हैं तथा प्रत्येक लिगैंड दो धातु केन्द्रों से संयुक्त है।

इसके अतिरिक्त इन संकरों में जल तथा OH^- समूह से सम्बन्धित आवृत्तियाँ[16] भी मिलती हैं। वे 800-850 cm^{-1} के सन्निकट Pr HOH (जल की rocking frequency)[17] तथा ~900 cm^{-1} पर M–OH की बंकन आवृत्ति (Bending M–OH) भी प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार इन संकरों में जल तथा OH^- समूह के उपसहसंयोजन के भी प्रमाण मिलते हैं।

इन संकरों में आक्सीधनायनों से सम्बन्धित γM=O[16] तथा γM–O–M[18, 19] की लाक्षणिक आवृत्तियाँ भी क्रमशः 960-900 cm^{-1} तथा 790-770 cm^{-1} के क्षेत्रों में प्राप्त होती हैं। इस प्रकार ये परिणाम M–O–M सेतुबन्धों के द्वारा निर्मित उनकी द्विनाभिकीय संरचना को प्रदर्शित करते हैं।

चुम्बकीय अध्ययन एवं इलेक्ट्रानीय स्पेक्ट्रम : चुम्बकीय अध्ययनों से प्रकट है कि सभी संकर प्रति-चुम्बकीय हैं, अतः इनमें Mo अथवा W आक्सीकरण अवस्था +6 ही है। पीले Mo(VI)–निकोटिनिक अम्ल संकर के इलेक्ट्रानीय स्पेक्ट्रम का भी अध्ययन किया गया, जिसमें मुख्य रूप से 350 तथा 390 नानोमीटर पर केवल दो आवेश-स्थानान्तरण बैंड (Charge transfer bands)[20] ही प्राप्त हुए। इस प्रकार इस पीले संकर का इलेक्ट्रानीय स्पेक्ट्रम Mo(VI) के ही अनुरूप है।

इन प्रमाणों से यह निष्कर्ष मिलता है कि Mo(VI) तथा W(VI) के ये संकर द्विनाभिकीय हैं जिनमें M–O–M सेतुबन्धों के द्वारा $(Mo_2O_4)^{4+}$ इकाइयाँ उपस्थित हैं। लिगैंड निकोटिनिक एवं आइसोनिकोटिनिक अम्ल भी संभवतः सेतुबन्धी हैं तथा पिरीडीन –N एवं COO समूहों के द्वारा दो विभिन्न धातु केन्द्रों से संयुक्त हैं। इसके अतिरिक्त इनमें OH^- समूह तथा जल के अणु भी संयुक्त हैं और इस प्रकार इन द्विनाभिकीय संकरों की संरचना संभवतः षष्ठ उपसहसंयोजित अष्टफलकीय है। यह भी उल्लेखनीय है कि यद्यपि Mo(VI)–निकोटिनिक अम्ल के दो संकरों (श्वेत तथा पीले) का संघटन सूत्र एक ही है, परन्तु विभिन्न संरचना के कारण उनके गुणधर्मों में अन्तर है। श्वेत संकर में संभवतः दो Mo केन्द्रों से संयुक्त दो OH^- समूह पर्याप्त रूप से सन्निकट हैं, अतः गरम करने पर इसमें से जल का एक

अणु निकल जाता है। परन्तु पीले संकर में OH^- समूहों के दूर-दूर स्थित होने के कारण जल की कोई क्षति नहीं होती।

सारणी 1

निकोटिनिक अम्ल एवं उसके Mo(VI) तथा W(VI) संकरों की अवरक्त आवृत्तियाँ (cm^{-1})

निकोटिनिक अम्ल	Mo(VI) श्वेत संकर	Mo(VI) पीला संकर	W(VI) संकर	बैंडों का एसाइनमेंट
—	3740	3680	3730	γ (OH)
—	3500—3400	3550—3260	3480—3300	γ (OH) (जल)
3045	3060	3045	3040	γ CH
2360, 1865	—	—	—	γ NH^+ (ज्विटर आयन)
1705	—	—	—	γ COOH
—	1628	1625	1625	δ HOH (जल)
1600	1610	1615	1605	γ as COO^-
1585	1583	1595	1595	γC=C एवं γC=N } पिरीडीन वलय
1572	1538	1538	1530	
1475	1452	1455	1455	
1410	1410	1385	1410	γ_s COO^-
—	952, 922	950, 900	950, 900	γ M=O
—	900	890	890	बंकन (Bending) (M-OH
—	790	860	842	Pr (H_2O)
—	768	790	785	γ M—O—M
—	475, 450	450	470, 446	γ M—N

सारणी 2

आइसोनिकोटिनिक अम्ल एवं उसके Mo(VI) तथा W(VI) संकरों की अवरक्त आवृत्तियाँ (cm^{-1})

आइसोनिकोटिनिक अम्ल	Mo(VI) संकर	W(VI) संकर	बैंडों का एसाइनमेट
--	3700, 3620	3780	γ (OH)
—	3500 – 3300	3500 – 3370	γ (OH) जल
3028	3050	3038	γ CH
2350, 1860	—	--	γ NH^+ (ज्विटर आयन)
1700	—	—	γ COOH
—	1630	1628	δ HOH (जल)
1600	1600	1598	γ_{as} COO^-
1590	1588	1590	γ C=C एवं γ C=N } पिरीडीन वलय
1550, 1502	1475	1500, 1488	
1402	1400	1390	γ_s COO^-
—	958, 918	962, 935	γ M=O
--	900	895	बंकन (Bending) (M—OH)
—	844	820	Pr H_2O
—	770	790	γ M—O—M
—	460, 425	450	γ M—N

निर्देश

1. वार्ले एच०, 'Practical Climical Biochemistry', आरनोल्ड-हैनमैन पब्लिशर्स (इंडिया) चतुर्थ संस्करण, 1995, 622
2. क्रासलैंड, जे०, 'Lews's Pharmacology', लिविन्गस्टोन लिमिटेड, चतुर्थ संस्करण, 1970, 715
3. बोर्डवेल, एफ० जी०, 'Organic Chemistry', मैकमिलन, न्यूयार्क, द्वितीय संस्करण, 1963, 695
4. ह्यूग्स, ई० बी०, जेलीनेक, एच० एच० जी० तथा ऐम्ब्रोज, बी० ए०, जर्न० फिजि० केमि०, 1954, **58**, 548

5. स्टीफेन्सन, एच० पी० तथा स्पोनर, एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1957, **79**, 2050

6. टेलर, एल० डी०, **जर्न० आर्गा० केमि०**, 1962, **27**, 4064

7. वोजिक, जे० एफ० तथा स्टाक, टी० एच०, **जर्न० फिजि० केमि०**, 1969, **73**, 2150

8. अजीजोव, एम० ए० तथा कान्तसेपोल्स्काया, के० एम०, **डाक० अकैद० नौक० उज्बेक० एस० एस० आर०**, 1959, **1**, 33

9. खाकीमोव, ख० ख० तथा अजीजोव, एम० ए०, **ज० निआर्ग० खिम०**, 1970, **15**, 2173

10. फाउल्स, जी० डब्लू० ए०, मैथ्यूस, आर० डब्लू० तथा वाल्टन, आर० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, A, 1968, 1108

11. एनाग्नोस्तोपुलस, ए०, मैथ्यूस, आर० डब्लू० तथा वाल्टन, आर० ए०, **कैनेड० जर्न० केमि०**, 1972, **50**, 1307

12. क्लाइन्सटीन, ए० तथा गाब, आई०, **ऐन० स्टिन्ट युनि०** "एल० आई० कुब्जा" आयसी खंड IC 1968, **14**, 139

13. दत्त, आर० एल० तथा चटर्जी, बी०, **जर्न० इंडि० केमि० सोसा०**, 1967, **44**, 685

14. बेलेमी, एल० जे०, "The Infrared Spectra of Complex Mulecules", **जॉन एफ०** विले एण्ड सन्स, न्यूयार्क, 1962.

15. राव, सी० एन० आर०, "Chemical Applications of Infrared Spectroscopy", एकैडेमिक प्रेस, न्यूयार्क एवं लंदन, 1963

16. नाकामोटो, के०, "Infrared Spectra of Inorganic and Coordination Compounds" विले इन्टरसाइन्स, न्यूयार्क 1970

17. फुजिता, एफ०, नाकामोटो, के०, तथा कोबायाशी एम०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1956, **78**, 3963

18. बाराक्लाउ, सी० जी०, लेविस, जे० तथा नाइहोम, आर० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1959, 3552

19. कोसिन्स, एम० तथा ग्रीन, एम० एल० एच०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1964, 1567

20. जारगेन्सन, सी० के०, 'Absorption Spectra and Chemical Bonding in Complexes", पर्गेमान प्रेस, आक्सफोर्ड, 1964.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 89-97

q-हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूपान्तरण

बी० एम० अग्रवाल
के० आर० जी० कालेज, ग्वालियर
तथा
वीरेन्द्र कुमार
एम० एल० इण्टर कालेज, सहपऊ, जिला मथुरा

[प्राप्त—फरवरी 26, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में q-हाइपरज्यामितीय श्रेणी के कुछ रूपान्तरण प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Transforms of hypergeometric series, *By* B. M. Agrawal, K. R. G. College, Gwalior, and Virendra Kumar, M. L. Inter College, Sahpau, (Mathura)

Some transforms of q-hypergeometric series have been obtained.

1. भूमिका

अग्रवाल[1] ने $\triangle_a$ तथा E_a आपरेटरों के प्रयोग से हाइपरज्यामितीय श्रेणी के कुछ रूपान्तरण प्राप्त किये हैं। आपरेटरों $\triangle_\alpha$ तथा E_a को निम्नवत् परिभाषित किया गया है :

$$\triangle_a f(a)=f(a+1)-f(a) \text{ तथा } E_a f(a)=f(a+1).$$

हमने आपरेटर $\triangle^{(n)}{}_a$ को इस प्रकार परिभाषित किया है :

$$\triangle^{(n)}{}_a=(E_a-q^{n-1})(E_a-q^{n-2}) \dots (E_a-1).$$

इस आपरेटर का प्रयोग कर हमने q-हाइपरज्यामितीय श्रेणी ${}_r\psi_s$ के कुछ रूपान्तरण प्राप्त किये हैं। q-हाइपरज्यामितीय श्रेणी को निम्नांकित तरीके से परिभाषित किया जायगा :

$${}_r\psi_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \dots a_r, x \\ b_1, b_2, b_3, \dots b_s \end{matrix}\right)^q = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i\,(a_2)_i\,(a_3)_i \cdots (a_r)_i\,(xq)^i}{(b_1)_i\,(b_2)_i\,(b_3)_i \cdots (b_s)_i\,(1)_i}$$

जहाँ कि

$$r \leqslant s+1,\ (a)_i = \left(\frac{1-q^a}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{a+1}}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{a+2}}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^{a+i-1}}{1-q}\right)$$

तथा $(a)_0 = 1.$

2. गणितीय साहित्य में q-द्विपद प्रमेय

$$(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^n q^{1/2r(r-1)} \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] x^r$$

जहाँ कि

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] = \frac{(q)_n}{(q)_{n-r}(q)_r}$$

रूप में वर्णित की गई है। q-द्विपद प्रमेय में x को $E^{-1}{}_\alpha$ से स्थानान्तरित करने पर हमें निम्नलिखित क्रियात्मक सूत्र प्राप्त होगा।

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha = \sum_{r=0}^{n} (-1)^n q^{1/2r(r-2)} \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] E^{n-r}{}_\alpha. \tag{2.1}$$

पुनः हम इस सूत्र को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} q^{1/2(n-r)(n-r-1)} \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] E^r{}_\alpha. \tag{2.2}$$

या

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha = (-1)^n q^{1/2n(n-1)} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r}{(1)_r} q^r E^r{}_\alpha. \tag{2.3}$$

आगमन विधि द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha[f_1(\alpha)f_2(\alpha)] = \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] \triangle^{(n-r)}{}_\alpha f_1(\alpha+r) \triangle^{(r)}{}_\alpha f_2(\alpha), \tag{2.4}$$

या

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha[f_1(\alpha)f_2(\alpha)] = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{nr-1/2r(r-1)} . \frac{(-n)_r}{(1)_r} \triangle^{(n-r)}{}_\alpha f_1(\alpha+r) \triangle^{(r)}{}_\alpha f_2(\alpha). \tag{2.5}$$

3. रूपान्तरण

आपरेटर $\triangle^{(n)}{}_a$ की परिभाषा से,

$$\triangle^{(n)}{}_a=(E_a-1)(E_a-q)(E_a-q^2)\ldots(E_a-q^{n-1}).$$

इसको हम

$$\triangle^{(n)}{}_a=(E_a-q^{n-1})(E_\alpha-q^{n-2})\ldots(E_a-1)$$

के रूप में लिख सकते हैं। इस क्रियात्मक सूत्र का $\frac{(a)_\alpha}{(b)_\alpha}$ पर प्रयोग करने पर

$$\triangle^{(n)}{}_a\frac{(a)_a}{(b)_\alpha}=(E_a-q^{n-1})(E_a-q^{n-2})\ldots(E_\alpha-1)\left\{\frac{(a)_a}{(b)_a}\right\} \tag{3.1}$$

$$=(-1)^n q^{1/2n(n-1)+n(a+c)}\frac{(b-a)_n}{(b+a)_n}\cdot\frac{(a)_\alpha}{(b)_\alpha}$$

प्राप्त होता है।

पुनः वाम पक्ष के लिए (2.2) का प्रयोग करने पर,

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r}{(1)_r}\cdot\frac{(a+a)_r}{(b+a)_r}q^r=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}q^{na}$$

प्राप्त होता है।

अतः

$$_2\psi_1\left(\begin{matrix}-n,\ a;\ 1\\ b\end{matrix}\right)^q=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}q^{na}. \tag{3.2}$$

क्रियात्मक सूत्र (2.5) में

$$f_1(a)=\frac{(a)_\alpha}{(b)_\alpha}\ \text{तथा}\ \ f_2(a)=\frac{(c)_\alpha}{(d)_a}$$

रखने पर हमें

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha\frac{(a)_a\,(c)_a}{(b)_a\,(d)_a}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r q^{nr-1/2r(r-1)}\frac{(-n)_r}{(1)_r}\triangle^{(n-r)}{}_a\frac{(a)_{a+r}}{(b)_{a+r}}\triangle^{(r)}{}_a\frac{(c)_\alpha}{(d)_a}$$

प्राप्त होगा। (3.3)

सूत्र (3.1) के फलस्वरूप हमें

$$\triangle^{(n-r)}{}_\alpha\frac{(a)_{a+r}}{(b)_{a+r}}=(-1)^{n-r}q^{1/2(n-r)(n-r-1)+(n-r)(a+a+r)}\cdot\frac{(b-a)_{n-r}}{(v+a+r)_{n-r}}\cdot\frac{(a)_{a+r}}{(b)_{a+r}}$$

प्राप्त होता है। सूत्र

$$(b-a)_{n-r}=(-1)^r q^{1/2r(r+1)-r(b-a+n)}\frac{(b-a)_n}{(a-b-n+1)_r}$$

का प्रयोग करने पर,

$$\triangle^{(n-r)}{}_{\alpha}\ \frac{(a)_{\alpha+r}}{(b)_{\alpha+r}}=(-1)^{n}q^{1/2(n-r)(n-r-1)+(n-r)(a+\alpha+r)+1/2r(r+1)-r(b-a+n)}$$

$$\times\frac{(b-a)_n\ (a+\alpha)_r(a)_\alpha}{(b+\alpha)_n\ (a-b-n+1)_r\ (b)_\alpha} \qquad (3.4)$$

पुनः सूत्र (3.1) तथा (3.4) का प्रयोग (3.3) में रखने पर

$$\triangle^{(n)}{}_{\alpha}\frac{(a)_\alpha\ (c)_\alpha}{(b)_\alpha\ (d)_\alpha}=(-1)^n\ \frac{(a)_\alpha\ (c)_\alpha\ (b-a)_n}{(b)_\alpha\ (d)_\alpha\ (b+\alpha)_n}\ q^{n(a+\alpha)+1/2n(n-1)}$$

$$\times\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r\ (a+\alpha)_r\ (d-c)_r\ (q^{c-b+1})^r}{(1)_r\ (c-b-n+1)_r\ (d+\alpha)_r}$$

प्राप्त होता है। वाम पक्ष के लिए क्रियात्मक सूत्र (2.3) का प्रयोग करने पर हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होता है।

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r\ (a+\alpha)_r\ (c+\alpha)_r}{(1)_r\ (b+\alpha)_r\ (d+\alpha)_r}\ q^r=\frac{(b-a)_n}{(b+\alpha)_n}\ q^{n(a+\alpha)}$$

$$\times\sum_{r=1}^{n}\frac{(-n)_r\ (a+\alpha)_r\ (d-c)_r\ (q^{c-b+1})^r}{(1)_r\ (a-b-n+1)_r\ (d+\alpha)_r}\ .$$

$\alpha=0$ रखने पर हमें फल

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r\ (a)_r\ (c)_r}{(1)_r\ (b)_r\ (d)_r}\ q^r=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\ q^{na}\ \sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r\ (a)_r\ (d-c)_r\ (q^{c-b+1})^r}{(1)_r\ (a-b-n+1)_r\ (d)_r}$$

प्राप्त होगा, जिसको हम

$${}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ c;\ 1\\ b,\ d\end{pmatrix}^{q}=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\ q^{na},\ {}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ d-c;\ 1\\ d,\ 1+a-b-n\end{pmatrix}^{1/q} \qquad (3.5)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

फल (3.5) में q को $1/q$ से स्थानान्तरित करने पर हमें

$${}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ c;\ 1\\ b,\ d\end{pmatrix}^{1/q}=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\ {}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ d-c;\ 1\\ d,\ 1+a-b-n\end{pmatrix}^{q} \qquad (3.6A)$$

प्राप्त होगा।

फल (3.5) के दक्षिण पक्ष में रूपान्तरण (3.6A) का प्रयोग करने पर निम्नांकित रूपान्तरण प्राप्त होगा।

$$ {}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ c;\ 1\\ b,\ d\end{pmatrix}^q=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n}\,q^{na}\ {}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n,\ a,\ 1+a+c-b-d-n;\ 1\\ a-d-n+1,\ a-b-n+1\end{pmatrix}^q. \tag{3.6B}$$

क्रियात्मक सूत्र (2.5) में

$$f_1(\alpha)=\frac{(a)_\alpha\,(c)_\alpha}{(b)_\alpha\,(d)_\alpha}\quad \text{तथा}\quad f_2(\alpha)=\frac{(e)_\alpha}{(f)_\alpha}$$

रखने पर हमें

$$\triangle^{(n)}{}_\alpha\frac{(a)_\alpha\,(c)_\alpha\,(e)_\alpha}{(b)_\alpha\,(d)_\alpha\,(f)_\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r q^{nr-1/2r(r-1)}\frac{(-n)_r}{(1)_r}$$

$$\triangle^{(n-r)}{}_\alpha\frac{(a)_{\alpha+r}\,(c)_{\alpha+r}}{(b)_{\alpha+r}\,(d)_{\alpha+r}}\ \triangle^{(r)}{}_\alpha\frac{(e)_\alpha}{(f)_\alpha}$$

प्राप्त होता है। क्रियात्मक सूत्र (2.3) तथा फल (3.1) का यहाँ उपयोग करने पर हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा।

$${}_4\psi_3\begin{pmatrix}-u,\ a+\alpha,\ c+\alpha,\ e+\alpha;\ 1\\ b+\alpha,\ d+\alpha,\ f+\alpha\end{pmatrix}^q=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r q^{1/2r(r+1)+r(e+\alpha)}$$

$$\times\frac{(-n)_r\,(f-e)_r\,(a+\alpha)_r\,(c+\alpha)_r}{(1)_r\,(f+\alpha)_r\,(b+\alpha)_r\,(d+\alpha)_r}$$

$$\times{}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n+r,\ a+\alpha+r,\ c+\alpha+r;\ 1\\ b+\alpha+r,\ d+\alpha+r\end{pmatrix}^q$$

$\alpha=0$ रखने पर हमें फल

$${}_4\psi_3\begin{pmatrix}-n,\ a,\ c,\ e;\ 1\\ b,\ d,\ f\end{pmatrix}^q=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r q^{1/2r(r+1)+re}\frac{(-n)_r\,(f-e)_r\,(a)_r\,(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(b)_r\,(d)_r}$$

$$\times{}_3\psi_2\begin{pmatrix}-n+r,\ a+r,\ c+r;\ 1\\ b+r,\ d+r\end{pmatrix}^q$$

प्राप्त होगा। इस फल के दक्षिण पक्ष में रूपान्तरण (3.6B) का प्रयोग करने पर फल निम्नवत् मिलेगा।

$${}_4\ {}_3\begin{pmatrix}-n,\ a,\ c,\ e;\ 1\\ b,\ d,\ f\end{pmatrix}^q=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r q^{1/2r(r+1)+re}\frac{(-n)_r\,(f-e)_r\,(a)_r\,(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(b)_r\,(d)_r}$$

$$\times\frac{(b-a)_{n-r}\,(d-a)_{n-r}}{(b+r)_{n-r}\,(d+r)_{n-r}}\,q^{(n-r)(a+r)}$$

$$\times {}_3\psi_2 \left(\begin{matrix} -n+r,\ a+r,\ 1+a+c-b-d-n+r;\ 1 \\ a-d-n+r+1,\ a-b-n+r+1 \end{matrix} \right)_q$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{3/2r(r+1)-r(b+d-2a+2n)+(n-r)(a+r)+re}$$

$$\times \frac{(-n)_r\,(f-e)_r\,(a)_r(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(b)_n\,(a)_{nr}} \cdot \frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(a-b-n+1)_r\,(a-d-n+1)_r}$$

$$\times {}_3\psi_2 \left(\begin{matrix} -n+r,\ a+r,\ 1+a+c-b-d-n+r;\ 1 \\ a-d-n+r+1,\ a-b-n+r+1 \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{3/2r(r+1)-r(b+d-e-2a+2n)+(n-r)(a+r)}$$

$$\times \frac{(-n)_r\,(f-e)_r\,(a)_r\,(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(a-b-n+1)_r\,(a-d-n+1)_r}$$

$$\times \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-n+r)_i\,(a+r)_i\,(1+a+c-b-d-n+r)_i\,q^i}{(a-d-n+r+1)_i\,(a-b-n+r+1)_i\,(1)_i}$$

$$= \frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{3/2r(r+1)-r(b+d-e-2a+2n)+(n-r)(a+r)}$$

$$\times \frac{(f-e)_r\,(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(1+a+c-b-d-n)_r}$$

$$\times \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-n)_{i+r}\,(a)_{i+r}\,(1+a+c-b-d-n)_{i+r}\,q^i}{(a-d-n+1)_{i+r}\,(a-b-n+1)_{i+r}}$$

$$= \frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, q^{3/2r(r+1)-r(b+d-e-2a+2n)+(n-r)(a+r)-r}$$

$$\times \frac{(f-e)_r\,(c)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(1+a+c-b-d-n)_r}$$

$$\times \sum_{s=r}^{n} \frac{(-n)_s\,(a)_s\,(1+a+c-b-d-n)_s\,q^s}{(a-d-n+1)_s\,(a-b-n+1)_s\,(1)_{s-r}}$$

$$= \frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n} \sum_{r=0}^{n} q^{r(r+1)+r(1+s)-r(b+d-e-2a+2n)+(n-r)(a+r)-r}$$

$$\times \frac{(f-e)_r\,(c)_r\,(-s)_r}{(1)_r\,(f)_r\,(1+a+c-b-d-n)_r}$$

$$\times \sum_{s=r}^{n} \frac{(-n)_s\,(a)_s\,(1+a+c-b-d-n)_s\,q^s}{(a-d-n+1)_s\,(a-b-n+1)_s\,(1)_s}$$

$$=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s\,(a)_s\,(1+a+c-b-d-n)_s\,q^s}{(a-d-n+1)_s\,(a-b-n+1)_s\,(1)_s}$$

$$\times \sum_{r=0}^{s} \frac{(-s)_r\,(c)_r\,(f-e)_r\,q^{na-r(b+d-e-a+n-s-1)}}{(1)_r\,(f)_r\,(1+a+c-b-d-n)_r}$$

अतः

$${}_4\psi_3\left(\begin{matrix}-n,\ a,\ c,\ e;\ 1\\ b,\ d,\ f\end{matrix}\right)_q$$

$$=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n}\,q^{na} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s\,(a)_s\,(1+a+c-b-d-n)_s\,q^s}{(a-d-n+1)_s\,(a-b-n+1)_s\,(1)_s}$$

$$\times\, {}_3\psi_2\left(\begin{matrix}-s,\ c,\ f-e:\ 1\\ f,\ 1+a+c-b-d-n\end{matrix}\right)_{1/q} \tag{3.7A}$$

दक्षिण पक्ष में रूपान्तरण (3.6A) का प्रयोग करने पर निम्नांकित रूपान्तरण प्राप्त होगा।

$${}_4\psi_3\left(\begin{matrix}-n,\ a,\ c,\ 1\\ b,\ d,\ t\end{matrix}\right)_q$$

$$=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n}\,q^{na} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s\,(a)_s\,(1+a+c-b-d-n)_s\,(f-c)_s\,q^s}{(a-d-n+1)_s\,(a-b-n+1)_s\,(f)_s\,(1)_s}$$

$$\times\, {}_3\psi_2\left(\begin{matrix}-s,\ c,\ 1+a+c+e-b-d-f-n;\ 1\\ 1+a+c-b-d-n,\ 1+c-f-s\end{matrix}\right)_q. \tag{3.7B}$$

उपरोक्त रूपान्तरणों की सहायता से इन फलों का सार्वीकरण किया जा सकता है और आगमन विधि द्वारा इसे सिद्ध भी किया जा सकता है।

'श्रेणी ${}_{p+1}\psi_{q+1}$ के रूपान्तरण के लिए ${}_p\psi_q$ के B वर्ग के रूपान्तरण सूत्र के दक्षिण पक्षीय संकलन को यथावत रखा जाय तथा इसके आन्तरिक योग में A वर्ग के रूपान्तरण (3.6A) के दक्षिण पक्ष की श्रेणी ${}_3\psi_2$ को संगत परिवर्तनों के साथ उसमें स्थान दे दिया जाय।'

इस प्रकार हमें

$${}_5\psi_4\left(\begin{matrix}-n,\ a,\ c,\ e,\ g;\ 1\\ b,\ d,\ f,\ h\end{matrix}\right)_q=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n}\,q^{na}$$

$$\times \sum_{s_1=0}^{n} \frac{(-n)_{s_1}(a)_{s_1}(1+a+c-b-d-n)_{s_1}(f-c)_{s_1} q^{s_1}}{(a-d-n+1)_{s_1}(a-b-n+1)_{s_1}(f)_{s_1}(1)_{s_1}}$$

$$\times \sum_{s_2=0}^{s_1} \frac{(-s_1)_{s_2}(c)_{s_2}(1+a+c+e-b-d-f-n)_{s_2}}{(1+a+c-b-d-n)_{s_2}(1+c-f-s_1)_{s_2}}$$

$${}_3\psi_2\left(\begin{matrix}-s_2, e, h-g; 1\\ h, 1+a+c+e-b-d-f-n\end{matrix}\right)^q \quad (3.8A)$$

इस रूपान्तरण के दक्षिण पक्ष में रूपान्तरण (3.6A) का प्रयोग करने पर

$${}_5\psi_4\left(\begin{matrix}-n, a, c, e, g: 1\\ b, d, f. h\end{matrix}\right)^q = \frac{(b-a)_n (d-a)_n}{(b)_n (d)_n} q^{na}$$

$$\times \sum_{s_1=0}^{n} \frac{(-n)_{s_1}(a)_{s_1}(1+a+c+b-d-n)_{s_1}(f-c)_{s_1} q^{s_2}}{(a-d-n+1)_{s_1}(a-b-n+1)_{s_1}(f)_{s_1}(1)_{s_1}}$$

$$\times \sum_{s_2=0}^{s_1} \frac{(-s_1)_{s_2}(c)_{s_2}(1+a+c+e-b-d-f-n)_{s_2}(h-e)_{s_2} q^{s_2}}{(1+a+c-b-d-n)_{s_2}(1+c-f-s_1)_{s_2}(h)_{s_2}(1)_{s_2}}$$

$${}_3\psi_2\left(\begin{matrix}-s_2, e, 1+a+c+e+g-b-d-f-h-n; 1\\ 1+a+c+e-b-d-f-n, 1+e-h-s_2\end{matrix}\right)^q$$

प्राप्त होता है ।

4. विशिष्ट दशायें

(i) यदि (3.6B) में $1+a+c-b-d-n=0$ रख दें तो हमें q-शालशुत्ज प्रमेय

$${}_3\psi_2\left(\begin{matrix}-n, a, c; 1\\ b, 1+a+c-b-n\end{matrix}\right)^q = \frac{(b-a)_n (b-c)_n}{(b)_n (b-a-c)_n}$$

प्राप्त होता है ।

(ii) यदि (3.7B) में $1+a+c+e-b-d-f-n=0$ रखें तो

$${}_4\psi_3\left(\begin{matrix}-n, a, c, e; 1\\ b, d, f\end{matrix}\right)^q = \frac{(b-a)_n (d-a)_n}{(b)_n (d)_n} q^{na}$$

$${}_4\psi_3\left(\begin{matrix}-n, a, f-e, f-c; 1\\ a-d-n+1, a-b-n+1, f\end{matrix}\right)^q$$

प्राप्त होता है ।

(iii) यदि (3.8B) में $1+a+c+e+g-b-d-f-h-n=0$ रखें तो

$$
{}_5\psi_4\left(\begin{matrix}-n, a, c, e, g; 1\\ b, d, f, h\end{matrix}\right)^q=\frac{(b-a)_n\,(d-a)_n}{(b)_n\,(d)_n}\,q^{na}
$$

$$
\times\sum_{s_1=0}^{n}\frac{(-n)_{s_1}\,(a)_{s_1}\,(f+h-e+g)_{s_1}\,(f-c)_{s_1}\,q^{s_1}}{(a-d-n+1)_{s_1}\,(a-b-n+1)_{s_1}\,(f)_{s_1}\,(1)_{s_1}}
$$

$$
{}_4\psi_3\left(\begin{matrix}-s_1, c, h-g, h-e; 1\\ f+h-e-g, 1+c-f-s_1, h\end{matrix}\right)^q
$$

प्राप्त होता है।

इन q-हाइपरज्यामितीय रूपान्तरणों के अतिरिक्त कुछ रूपान्तरण क्रियात्मक विधि को अपना कर पहले[2] ज्ञात किये जा चुके हैं।

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० एम०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1973, **16**, 169-176
2. अग्रवाल, बी० एम० तथा वीरेन्द्र कुमार, **वही**, 1978, **21**, 361-371

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 99-104

सिनकोनिन-धातु संकुलों का अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययन

एस० एस० गुप्ता, कु० कुमुद गुप्ता तथा आर० कौशल
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मार्च 1, 1979]

सारांश

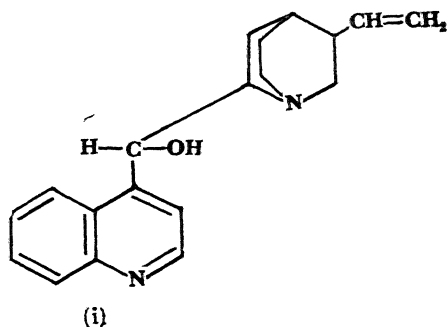
सिनकोनिन (I) तथा उससे बने कापर, सिल्वर, मरकरी, आयरन तथा कोबाल्ट लवणों के संकुलों का अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययन किया गया। लिगैंड के अवशोषण बैंड तथा संकुल बनने पर उनमें आये परिवर्तन की तुलना की गई। सभी संकुलों में धातु-नाइट्रोजन बैंड की आवृत्ति 655 ± 10 cm^{-1} पर पायी गयी जबकि सिल्वर, आयरन एवं कोबाल्ट संकुलों में धातु-आक्सीजन आवृत्ति $670 \pm 10 cm^{-1}$ पर।

Abstract

Study of *i. r.* spectra of cinchonine-metal complexes. *By* S. S. Gupta, Ku. Kumud Gupta and R. Kaushal, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahvidyalaya, Bhopal.

Infra red absorption bands of cinchonine (I) and its complexes with Cu, Ag, Hg, Fe, and Co salts were studied. Comparative assignments are given to the absorption bands of ligand and the variations arose on complexation. Metal-Nitrogen frequencies are observed at $655 \pm 10 cm^{-1}$ in all the complexes, while metal-Oxygen frequencies at 670 ± 10 cm^{-1} in Ag, Fe, and Co complexes.

एन्टीमलेरियल पदार्थों के साथ धातुओं के संकुलों के अध्ययन[1–6] को आगे बढ़ाते हुए, प्रस्तुत शोधपत्र में अनेक महत्वपूर्ण अवरक्त स्पेक्ट्रमों का विश्लेषण किया गया है जिसके आधार पर संकुलों के संरचना-सूत्र प्रस्तावित किये गये हैं।



(i)

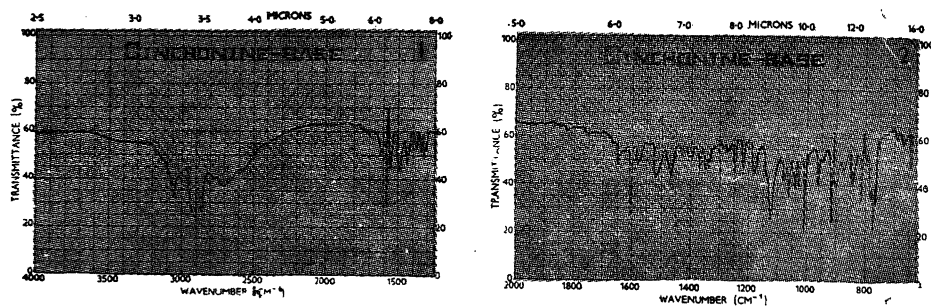


Fig. 1. (Cinchonine-Base)

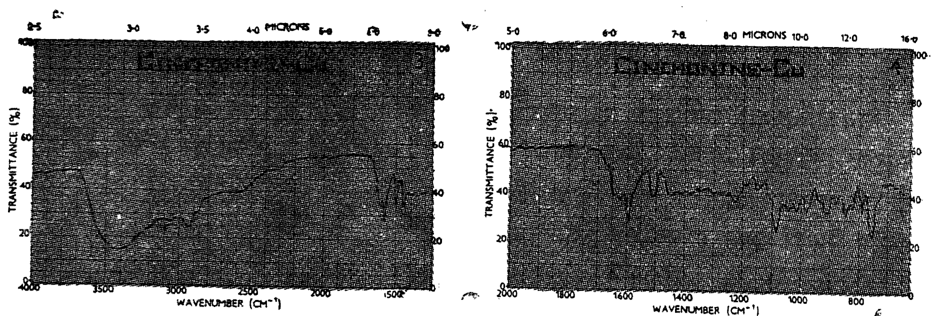


Fig. 2. (Cinchine-Cu)

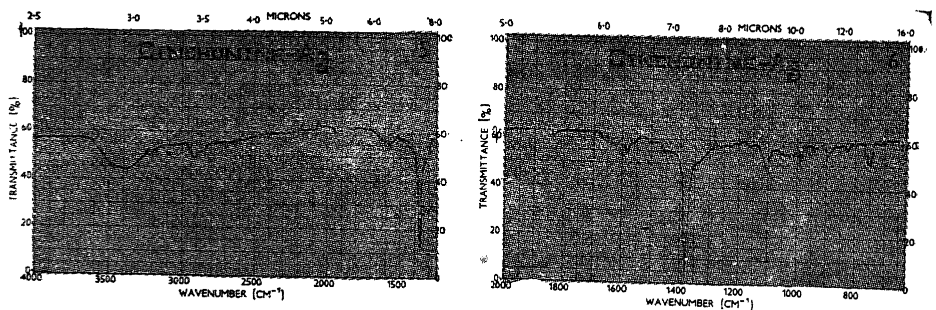


Fig. 3. (Cinchonine-Ag)

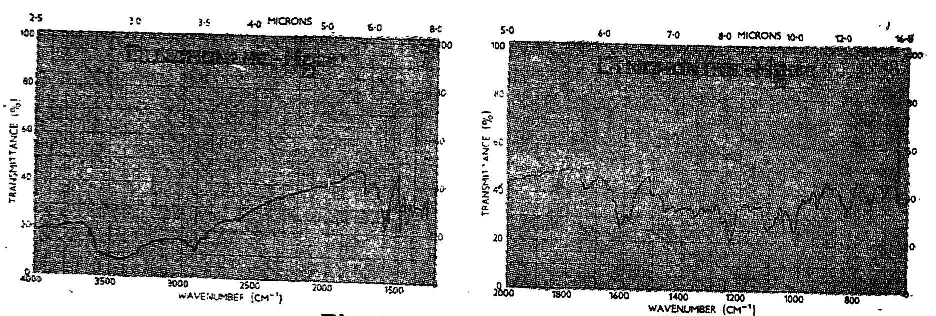


Fig. 4. (Cinchonine-Hg) 1:1

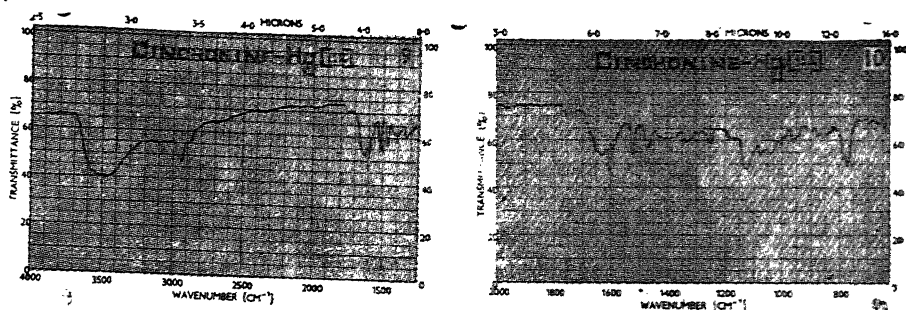


Fig. 5. (Cinchonine-Hg) 1:2

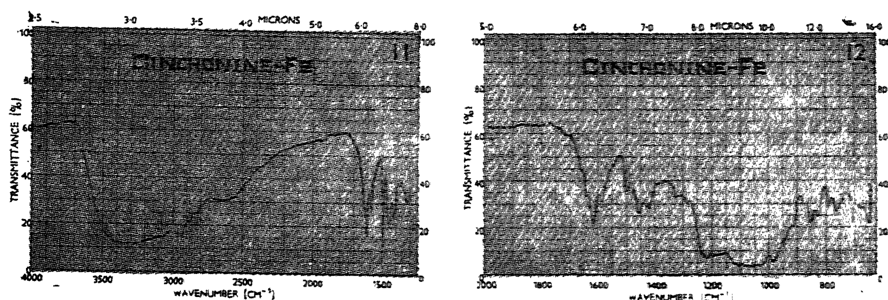


Fig. 6. (Cinchonine-Fe)

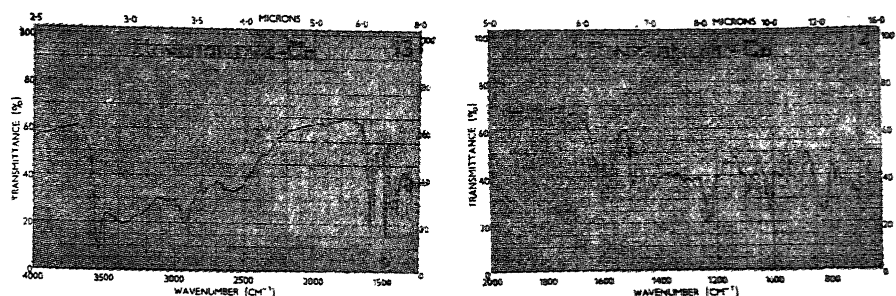


Fig. 7. (Cinchonine-Co)

प्रयोगात्मक

धातुओं के विभिन्न संकुल, पिछले शोध पत्रों में वर्णित विधियों के अनुसार बनाये गये। संकुलो में धातुओं का निर्धारण विभिन्न विधियों से, नाइट्रोजन का जेल्डाल विधि से तथ जल का निर्धारण संकुलों को 115° से 120° सें० ताप पर गरम करने से भार में होने वाली कमी द्वारा किया गया। सावधानीपूर्वक शोधित पदार्थों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr डिस्क विधि से पर्किन-एल्मर माडल 237, स्पेक्ट्रममापी द्वारा प्राप्त किये गये, इनमें से कुछ महत्वपूर्ण अवशोषण बैंडों का अध्ययन नीचे दिया गया है।

विवेचना

साधारणत: लिगैन्ड के अवशोषण बैंड में संकुल बनने पर परिवर्तन आ जाता है। ये बैंड निम्न क्षेत्र में धातु-नाइट्रोजन या धातु-आक्सीजन के तथा उच्च क्षेत्र में संयोजन आवृत्ति के हो सकते हैं। विभिन्न संकुलों की धातु-नाइट्रोजन तथा धातु-आक्सीजन आवृत्ति सारणी 1 में दी गई है।

सारणी 1

अनुक्रमांक	संकुल का सूत्र	धातु-नाइट्रोजन आवृत्ति	धक्तु आक्सीजन आवृत्ति	विशेष
1.	$C_{19}H_{22}ON_2 . Cu\ Cl_2$	655		
2.	$C_{19}H_{22}ON_2 . Ag\ NO_3$	650	670	नाइट्रेट के कारण
3.	$C_{19}H_{22}ON_2 . Hg\ Cl_2$	660		
4.	$C_{29}H_{32}ON_2 . 2Hg\ Cl_2$	660		
5.	$C_{19}H_{22}ON_2 . Fe\ SO_4 . H_2O$	650	660	सल्फेट तथा जल
6.	$C_{19}H_{22}ON_2 . Co\ Cl_2 . H_2O$	645	680	सल्फेट तथा जल

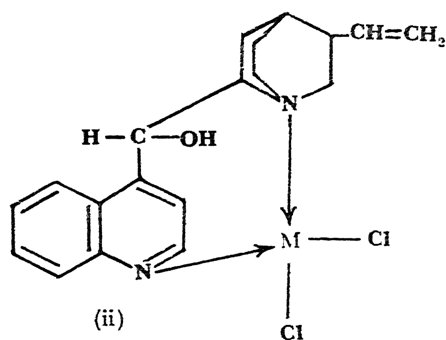
उपर्युक्त परिणाम चतुर्वेदी तथा कौशल[7], नाकामोटो[8], एवं गुप्ता तथा कौशल[9] द्वारा दी गई धातु-नाइट्रोजन आवृत्ति से मेल खाते हैं। सिनकोनिन सिल्वर संकुल में नाइट्रेट की पुष्टि 825 तथा 1380 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है, जबकि सिनकोनिन आयरन संकुल में सल्फेट की उपस्थिति 1170 तथा 1420 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है। आयरन तथा कोबाल्ट के संकुलों के विश्लेषण से यह ज्ञात हुआ कि इनमें एक अणु का भी उप-सहसंयोजकता द्वारा जुड़ा हुआ है, जिसकी पुष्टि निम्नलिखित अवशोषण बैंड द्वारा होती है।

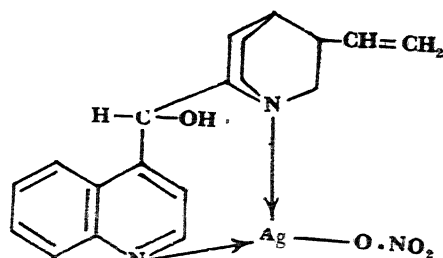
सिनकोनिन आयरन	सिनकोनिन कोबाल्ट
830	825
3150	3120
3460	3540

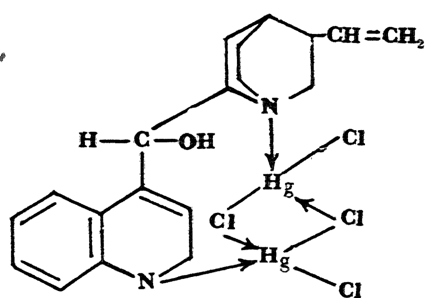
संकुलों के अन्य अवशोषण बैंड का अध्ययन करने से यह पता लगा कि बाइनिल ग्रूप के अवशोषण बैंड में जो कि 900, 980, 1400, 1650 तथा 2990 पर प्राप्त होते हैं, के अवशोषण बैंड में संकुल बनने के पूर्व एवं बाद में कोई विशेष परिवर्तन नहीं आया जिससे यह स्पष्ट होता है कि संकुल बनाने में बाइनिल ग्रूप का कोई योगदान नहीं है।

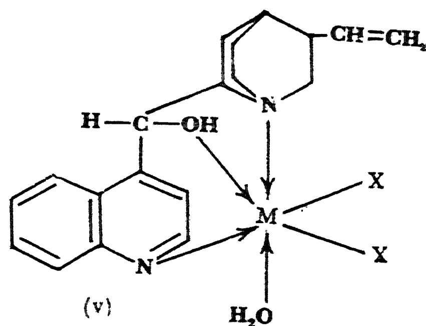
इसी प्रकार द्वितीयक ऐल्कोहल ग्रूप में कापर, मरकरी तथा सिल्वर संकुलों के अवशोषण बैंड में कोई परिवर्तन नहीं पाया गया, जबकि आयरन तथा कोबाल्ट के संकुलों में से प्रत्येक में 1085 तथा 2640 cm^{-1} पर अवशोषण पाया जो शुद्ध सिनकोनिन के 1060 तथा 2580 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड से भिन्न है। इससे यह स्पष्ट होता है कि केवल आयरन एवं कोबाल्ट संकुलों में ही द्वितीयक ऐल्कोहल ग्रूप भाग ले रहा है।

इस प्रकार प्रस्तुत पत्र में दिये गये अवरक्त स्पेक्ट्रमों से तथा पिछले शोध पत्रों[1-6] में दिये गये चालकता अनुमापनों से, स्पेक्ट्रमी प्रकाशमापी विधियों से, विश्लेषण आंकड़ों से एवं अन्य भौतिक रासायनिक गुणों के आधार पर विभिन्न धातु-सिनकोनिन संकुलों को निम्न रचनाएँ दी गई हैं।









कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, विभिन्न संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम निकालने के लिये भारत हेवी इलेक्ट्रिकल्स भोपाल के एवं शोध के लिये सुविधाएँ प्रदान करने के लिये प्राचार्य, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय के आभारी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, एस॰ एस॰ तथा कौशल, आर॰, **जर्नं॰ इन्डियन केमि॰ सोसा॰**, 1974 **51**, 649.
2. गुप्ता, एस॰ एस॰, सिद्दीकी, एस॰, तथा कौशल, आर॰, **जर्नं॰ इन्डियन केमि॰ सोसा॰**, 1974, **51**, 769.
3. गुप्ता, एस॰ एस॰ तथा कौशल, आर॰, **जर्नं॰ इन्डियन केमि॰ सोसा॰**, 1975, **52**, 642.
4. गुप्ता, एस॰ एस॰, सिद्दीकी एस॰ तथा कौशल, आर॰, **जर्नं॰ इन्डियन केमि॰ सोसा॰**, 1976, **53**, 242.
5. गुप्ता, एस॰ एस॰ तथा कौशल, आर॰, **विज्ञान परिषद अनु॰ पत्रिका**, 1977, **20(3)**, 223.
6. गुप्ता, एस॰ एस॰, सिद्दीकी, एस॰ तथा कौशल, आर॰, **साइंस एन्ड कल्चर**, 1977, **43**, 443.
7. चतुर्वेदी, के॰ के॰ तथा कौशल, आर॰, **रिसर्च जर्नं॰ इन्दौर विश्वविद्यालय**, 1972, **1(2)**,56.
8. नाकामोटो, के॰, "Infra-red Spectra of Inorganic and Coordination Compounds" जॉन विले एन्ड सन्स, न्यूयार्क 1963, पृष्ठ 225 एवं 156.
9. गुप्ता, एस॰ एस॰ तथा कौशल, आर॰, **विज्ञान परिषद अनु॰ पत्रिका**, 1978, **21(3)**, 253.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24 No. 2, April, 1981, Pages 105-108

रसायन तथा वृद्धि नियन्त्रकों के घोल में पूर्वअवशोषित धान के बीज का कैटेलेस सक्रियता एवं श्वसन पर प्रभाव

कन्हैया लाल

दैहिकी प्रखण्ड, उ० प्र० गन्ना शोध परिषद, शाहजहाँपुर

[प्राप्त—अगस्त 20, 1980]

सारांश

धान के दाने की दुग्धावस्था में इण्डोल-3-ऐसीटिक अम्ल (10 ppm) से कैटलेस सक्रियता एवं श्वसन की दर में वृद्धि हुई। नाइट्रोजन से कैटेलेस / श्वसन में वृद्धि देखी गई। इस प्रकार दाने के उत्पादन में कैटेलेस तथा श्वसन सक्रियता सह-सम्बन्ध उत्तरदायी प्रतीत होता है।

Abstract

Effect of pre-soaking paddy seeds in chemical and growth regulators on catalase activity and respiration. *By* Kanhaiya Lal, Division of Physiology, U. P. Council of Sugarcane Research, Shahjahanpur.

Indole-3-acetic acid (10 ppm) played a role to increase the catalase and respiratory activity while C/R (Catalase/Respiratory activity) ratio was enhanced under the influence of nitrogen only at milky grain stage in paddy (*Oryza sativa L. var. Vasmati*). Thus, it showed a tendency for existence of a correlation between catalase and respiratory activity responsible for grain production.

प्रयोगात्मक

धान (*Oryza sativa* L. var. Vasmati) के समान बीजों को 15 विभिन्न घोलों 1. फास्फोरस (0.5 ppm, पोटैशियम हाइड्रोजन फास्फेट), 2. नाइट्रोजन (2.0 ppm, अमोनियम नाइट्रेट), 3. सोडियम क्लोराइड (5%), 4. मैंगनीज (0.5 ppm, मैंगनीज सल्फेट), 5. बोरान (0.5 ppm, बोरिक एसिड), 6. ताँबा (0.5 ppm, कापर सल्फेट), 7. जिंक (0.5 ppm, जिक सल्फेट), 8. मालिब्डिनम (0.1 ppm,

मालिब्डिक अम्ल), 9-11. इण्डोल-3-ऐसीटिक अम्ल (क्रमशः 0.1, 0.25 एवं 10 ppm), 12-14. नैफ्थैलीन ऐसीटिक अम्ल (क्रमशः 0.1, 0.25 एवं 10 ppm) एवं 15. जल (नियन्त्रक) में भिगोया गया। बीजों को नैफ्थैलीन ऐसीटिक एसिड (10 ppm) एवं इण्डोल ऐसीटिक एसिड (10 ppm) में 15 मिनट तथा अन्य घोलों में 48 घन्टे तक भिगोया गया। 3 सप्ताह के पश्चात् पौधों को गमलों में उगाया गया जिनमें मृदा एवं गोबर की खाद 2 और 1 के अनुपात में मिली थी। कैटेलेस सक्रियता 14वें, 42वें और 80वें दिन पर चांस एवं मैकिली[1] के नियमानुसार मापी गयी जिसे 5 मिनट में प्रति ग्राम स्वच्छ ऊतक से आक्सीजन (मिली०) की उत्पत्ति के रूप में प्रदर्शित किया गया। श्वसन की दर क्रमशः 14वें, 42वें, और 80वें दिन पर बारबुर्ग के श्वसनमापी (सिंह[2]) से नापा गया। श्वसन की दर को 1 ग्राम शुष्क पत्ती से 1 घन्टे में 29°C±0.2 ताप पर कार्बन डाइ आक्साइड के मिग्रा० को प्रदर्शित किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्रस्तुत प्रयोग से ज्ञात हुआ कि 14वें दिन पर रसायन या वृद्धि नियन्त्रक का कैटेलेस सक्रियता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा। जिंक से 42वें दिन कैटेलेस सक्रियता अधिकतम थी। 80वें दिन (दाने की दुग्धा-वस्था) सोडियम क्लोराइड, ताँबा, नैफ्थैलीन ऐसीटिक एसिड (10 ppm) और इण्डोल-3-ऐसीटिक अम्ल (10 ppm) का प्रभाव विपरीत पड़ा जबकि इण्डोल-3-ऐसीटिक एसिड कैटेलेस सक्रियता को सर्वाधिक बढ़ाने में सक्षम रहा (सारणी 1)।

14वें तथा 42वें दिन मैंगनीज, बोरान, ताँबा, फास्फोरस, सोडियम क्लोराइड और नैफ्थैलीन ऐसीटिक एसिड (0.1 ppm) से श्वसन की दर में गिरावट आई जबकि अन्य उपचारों से श्वसन दर में वृद्धि हुई। 80वें दिन ताँबे को छोड़कर सभी उपचारों में श्वसन की दर में वृद्धि हुई। इण्डोल-3-ऐसीटिक अम्ल (10 ppm) से श्वसन की दर सर्वाधिक बढ़ी (सारणी 1)।

14वें दिन नियन्त्रण प्रयोग की तुलना में सभी उपचारों से C/R अनुपात में कमी आई (सारणी 1)। किन्तु 42वें दिन सभी उपचारों इस अनुपात में वृद्धि देखी गयी। 80वें दिन बोरान, जिंक, फास्फोरस, नाइट्रोजन और इण्डोल-3-ऐसीटिक एसिड (0.1 ppm) के अतिरिक्त अन्य उपचारों से C/R अनुपात में गिरावट आयी। पौधे की उपज में श्वसन प्रक्रम, कैटेलेस सक्रियता तथा पौधे की उम्र का सक्रिय योगदान रहता है। उपलब्ध परिणाम इवानोव[3] के समर्थन में हैं जिन्होंने यह दर्शाया है कि मैंगनीज प्रायः कैटेलेस एवं पराक्सीडेस सक्रियता को बढ़ाता है। वीलमेयर एवं सहयोगियों[4] ने भी बताया है कि मैंगनीज की अधिकता में पराक्सीडेस सक्रियता बढ़ती है जबकि कैटेलेस सक्रियता घटती है। सीडेरिस एवं यंग[5] ने भी देखा है कि मैंगनीज के अभाव में कैटेलेस सक्रियता कम हो जाती है।

प्रायः पौधे के वृद्धि के दूसरे से छठें सप्ताह के बीच में कैटेलेस की सक्रियता अधिक होती है। सबसे कम सक्रियता पौधे की वृद्धि की प्रारम्भिक अवस्था में देखी गयी है। श्वसन प्रक्रम, कैटेलेस सक्रियता का अनुगमन नहीं करता क्योंकि प्रारम्भिक अवस्था में श्वसन की दर अत्यधिक होती है। ताँबा पौधे की उचित उपापचयी क्रियाओं के लिए आवश्यक है। यह पर्णहरित के निर्माण एवं नाइट्रोजन तथा अवकृत शर्करा को संतुलित करने में सहयोगी है। ताँबे की अनुपस्थिति में प्रकाश संश्लेषण कम हो जाता है। सिंह

सारणी 1

कैटेलेस सक्रियता, श्वसन एवं कैटेलेस-श्वसन सम्बन्ध पर पूर्व उपचारित घन के बीज का प्रभाव

	कैटेलेस सक्रियता C			श्वसन दर R			अनुपात C/R		
उपचार	14	42	80	14	42	80	14	42	80
1. जल (नियंत्रण)	26	24	46	8.90	13.8	7.20	2.9	1.7	6.3
2. मैंगनीज	9	36	46	6.60	9.46	8.80	1.3	3.8	5.2
3. बोरान	12	49	74	7.76	9.26	8.80	1.5	5.2	8.4
4. ताँबा	9	62	42	4.63	4.73	7.10	1.9	13.1	5.9
5. जिंक	14	84	74	13.46	17.83	11.20	1.04	4.7	6.6
6. मालिब्डिनम	11	46	47	10.89	16.50	11.80	1.01	2.7	3.9
7. फास्फोरस	16	42	53	6.53	5.18	8.20	2.4	8.1	6.4
8. नाइट्रोजन	13	38	116	19.22	14.60	11.00	0.6	3.8	10.5
9. सोडियम क्लोराइड	11	52	27	6.94	9.62	10.10	1.5	5.4	2.6
10. IAA (0.1 ppm)	24	37	140	9.77	15.41	14.60	2.4	2.4	9.5
11. IAA (0.25 ppm)	16	47	62	10.89	18.72	16.52	1.4	2.5	3.7
12. IAA (10 ppm)	15	41	42	12.81	22.00	17.60	1.1	1.8	1.3
13. NAA (0.1 ppm)	16	40	52	8.39	9.20	10.60	1.9	4.3	4.9
14. NAA (0.25 ppm)	16	37	46	9.32	8.38	8.80	1.7	4.4	5.2
15. NAA (10 ppm)	17	46	34	12.81	17.60	15.40	1.3	2.6	2.2

IAA इण्डोल ऐसीटिक अम्ल, NAA नैफ्थलीन ऐसीटिल अम्ल

एवं पाल[6] ने देखा है कि अलसी (*Linum usitatissi mum L.*) में बोरान तथा इण्डोल ब्यूटिरिक अम्ल समान्तर रूप से कायिकी प्रक्रम में कार्यरत होते हैं। मैंगनीज से आक्सीजन की शक्ति बढ़ती है। सीडेरिस एवं यंग[5] ने दर्शाया है कि मैंगनीज पर्णहरित के प्रिकर्सर तथा कैटेलेस के हीम (Haem) को प्रभावित करता है।

सरकार एवं अमीन[7] ने बताया है कि मैंगनीज के विषैलेपन से भी पराक्सीडेस, पॉलीफीनाल आक्सीडेस, ग्लूटेथीयोन आक्सीडेस, साइटोक्रोम आक्सीडेस सक्रियता आदि बढ़ जाती है।

प्रस्तुत अध्ययन से यह ज्ञात हुआ है कि पौधे के जीवन में दो अवस्थायें होती हैं-प्रथम कार्बोहाइड्रेट, प्रोटीन, वसा आदि का उत्पादन; द्वितीय उत्पन्न पदार्थों का दाने तक परिवहन। पौधे की उपज में कायिकी प्रक्रम का बहुत महत्वपूर्ण स्थान है। 14वें से 80वें दिन की अवस्था को धान के पौधे को तीन अवस्थाओं में बाँटा जा सकता है–(1) प्रारम्भिक अवस्था (दो सप्ताह तक), (2) तीव्र कायिक वृद्धि (दूसरे से छठें सप्ताह तक) तथा (3) दाने की दुग्धावस्था (सातवें से बारहवें सप्ताह तक)। कैटेलेस सक्रियता एवं श्वसन के बीच कोई धनात्मक समानता नहीं देखी जा सकी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी तथा मार्ग दर्शन हेतु डा० अमर सिंह, वनस्पति विज्ञान विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय का आभारी है।

निर्देश

1. चांस, बी० तथा मैकिली, ए० सी०, Methods in Enzymology, अकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1955.
2. सिंह, ए०, Practical Plant Physiology, कल्यानी पब्लिसर्स, नई दिल्ली, 1977.
3. इवानोव, एन० एम०, **फिजियालोजिया रास्ट० ब्रा०**, 1966, 82-90
4. वीलमेयर, एच०पी०, फिशर, एफ० तथा बर्गमैन्, डब्लू०, **स्वायल एण्ड फर्टीलाइजर्स**, 1967, **30**, 71.
5. सीडेरिस, सी० पी० तथा यंग, एच० वाई०, **प्लान्ट फिजियालोजी**, 1949, **24**, 416-440.
6. सिंह, ए० तथा पाल, ए०, **नेशनल एके० साइंस ऐनुअल** नम्बर, 1966.
7. सरकार, एस० तथा अमीन, जे० वी०, **प्लान्ट फिजियालोजी**, 1974, **54**(4), 539-543.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 109-112

मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल

एस० एस० गुप्ता, श्रीमती कुमुद मोदी तथा आर० कौशल
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मई 24, 1980]

सारांश

चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात हुआ कि मलेरिया औषधियों में से मेपाक्रीन, क्यूप्रिक क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 1:2 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I. R.) से भी की गई है।

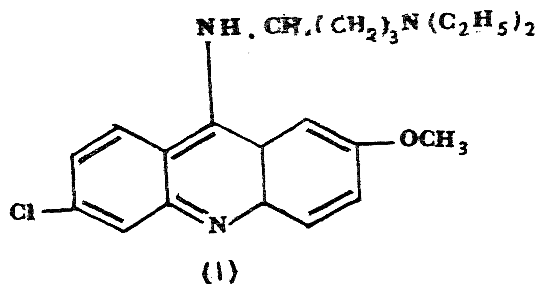
Abstract

Mepacrine-cupric chloride complex. *By* S. S. Gupta, Smt. Kumud Modi and R. Kaushal, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Mepacrine, an antimalarial, forms 1:2 complex with cupric chloride in alcoholic solutions as indicated by conductometric titrations and analytical data. Structure assigned is supported by I. R. spectral bands.

मेपाक्रीन (I), 6-क्लोरो-9 [{4-(डाई एथिल एमिनो)-1-मेथिल ब्यूटिल}एमिनो]-2-मेथाक्सी एक्रीडीन का एक अणु मुख्य रूप से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

(i) डाइ एथिल ऐमिनो-1 मेथिल ब्यूटिल ऐमिनो पार्श्व शृंखला तथा (ii) डाइ आर्थो डाइ-बेंजो-4 ऐमिनो पिरीडीन।



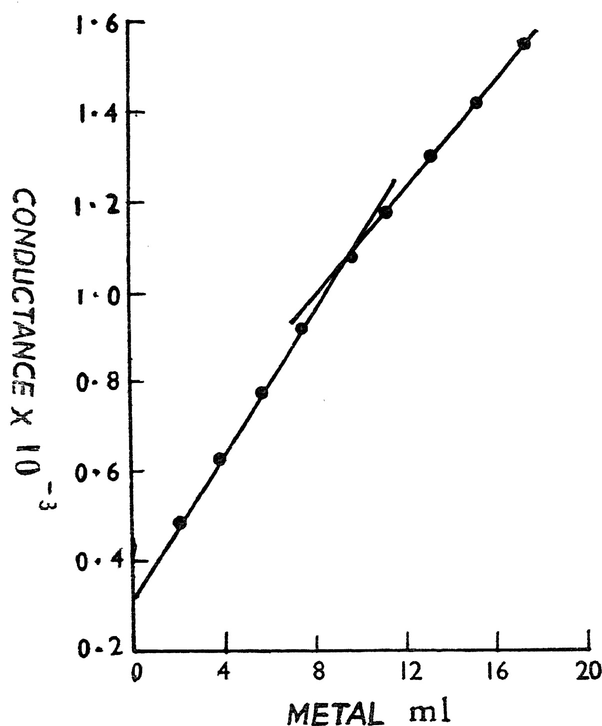
(I)

धातुओं के साथ संकुल बनाने में उपर्युक्त दोनों भाग या एक भाग काम में आता है, अतः धातुओं के साथ एन्टीमलेरियल के संकुलों के अध्ययन[1-8] को आगे बढ़ाते हुए प्रस्तुत शोधपत्र में मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल वर्णित किया गया है।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन :

मेपाक्रीन हाइड्रोक्लोराइड (0.01 M) तथा क्यूप्रिक क्लोराइड (0.02 M) के मानक विलयन दो बार आसवित शुद्ध चालकता जल में बनाये गये। लीगैन्ड के 10 मि० ली० विलयन को 100 मि० ली० तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ 'तोशनीवाल' चालकतामापी द्वारा 30° से० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद प्राप्त परिणाम 1:2 मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि करते हैं (चित्र 1)।



चित्र 1

वियोजन तथा विश्लेषण :

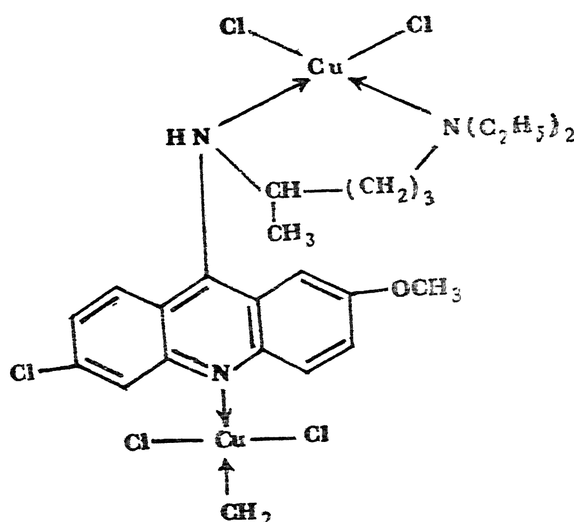
मेपाक्रीन बेस (आधिक्य) तथा क्यूप्रिक क्लोराइड (1 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगैन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के मिलाया गया तथा बाद में

बर्फ में रखकर ठंडा किया गया। फलस्वरूप गहरे पीले रंग का संकुल प्राप्त हुआ, जिसे छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया। संकुल 150° से० पर पिघलता है।

संकुल में Cu, 18.36; Cl, 19.95, N, 5.83;तथा H_2O 3.32 प्राप्त हुए जबकि $C_{23}H_{30}ON_3$ Cl. $(CuCl_2)_2.H_2O$ में सिद्धान्त Cu, 18.50; Cl 20.65; N, 6.12 तथा H_2O, 2.62 होना चाहिये।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की संरचना को (II) के द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



II

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I. R.) द्वारा भी होती है जिसमें धातु नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 650 cm^{-1} पर प्राप्त होता है। संकुल में एक जल अणु उपसह-संयोजकता द्वारा बँधा है, जिसकी पुष्टि 825 एवं 3520 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है। उपरोक्त संरचना मेपाक्रीन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल[9] के अनुरूप है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, शोधकार्य हेतु सुविधाएँ प्रदान करने के लिए मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य के आभारी हैं। शोध कार्य में आर्थिक सहायता के लिए एक लेखक (एस० एस०गुप्ता) विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का अत्यन्त आभारी है।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769
3. गुप्ता एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 242
5. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **साइंस एन्ड कल्चर**, 1977, **43**, 443
6. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1978, **21**(3), 253
7. गुप्ता, एस०एस०, गुप्ता, कु० कुमुद तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1978, **21**(3), 261
8. गुप्ता, एस० एस० तथा गुप्ता, कु० कुमुद, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1980, **23**(1), 65
9. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1977, **20**(3), 223

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981 Pages, 113-120

भोपाल के भाण्डेर श्रेणी के बलुआ पत्थरों में संगुटिकाश्म

आर० डी० तापी
भूविज्ञान विभाग, शासकीय महाविद्यालय, झाबुआ

[प्राप्त–अगस्त 2,1980]

सरांश

संगुटिकाश्म की परतें, भोपाल के आर्थोक्वार्टजाइट की परतों के साहचर्य में पाई जाती हैं । यह भोपाल का क्षेत्र वृहत विन्ध्य श्रेणी के किनारे पर स्थित है । संगुटिकाश्म में विभिन्न शैल प्रकारों की गुटिकाओं तथा गोलाश्मिकाओं की उपस्थिति यह इंगित करती है कि यह संगुटिकाश्म बाह्य शैल समूही विविधावसादी हैं (श्विटझाप) । इस संगुटिकाश्म में कोणीय तथा उपकोणीय टुकड़े विद्यमान हैं जो ग्रेनिट जैस्पर, अल्पसिलिक कायान्तरित शैलों से बने हैं । संगुटिकाश्म बलुआपत्थर तथा सिल्टस्टोन में पार्श्वक्रमण प्रदर्शित करता है । संगुटिकाश्म का संस्तरण, पार्श्वक्रमण से ऐसा विदित होता है कि ये तटप्रदेशीय निक्षेप है ।

Abstract

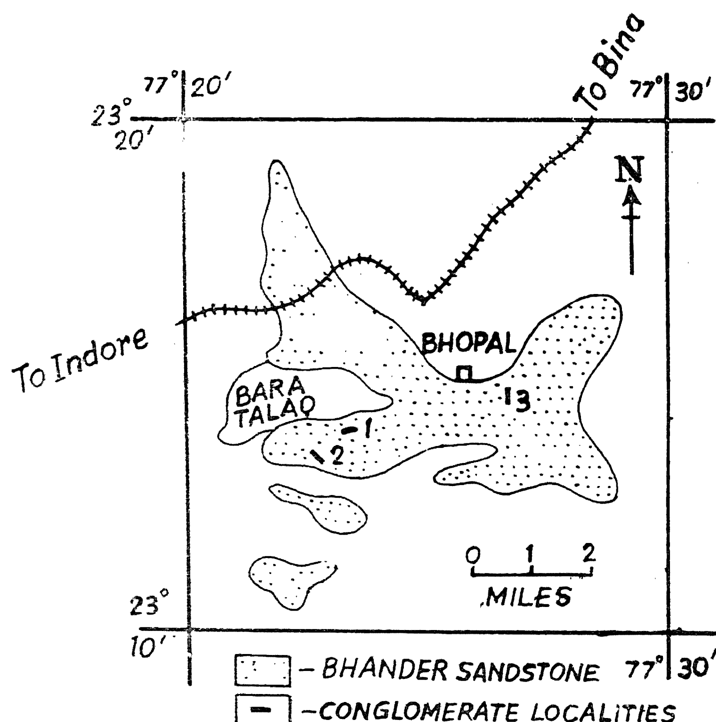
Bhander conglomerate at Bhopal. *By* R. D. Tapi, Geology Department, Government College, Jhabua, M. P.

The conglomerate horizons occur closely associated with the ortho-quartzites at Bhopal which forms a part of margin of the great Vindhyan Basin. The presence of pebbles and cobbles of various lithotypes suggests that the conglomerate belongs to the extra formational polymictic type (Schchwetzoff, 1934). The conglomerate contains angular to sub-angular fragments of granite, banded Jasper, basic meta basic rocks. The conglomerate shows lateral gradation into sandstones and siltstones. The sequence of the conglomerate and lateral variation suggest it to be a nearshore deposit.

भोपाल जिले के क्षेत्र में, जो कि विंध्य द्रोणी की उत्तरी-पूर्वी सीमा पर स्थित है, तीन संगुटिकाश्म के मुख्य स्तर पाये गये हैं, जो बलुआ पत्थरों के संस्तरों के साथ अन्तरासंस्तरित हुए हैं। संगुटिकाश्म के टुकड़े गोलाभ, उपगोलाभ गोलाश्मिकाएँ हैं जो चर्ट, विभिन्न प्रकार के क्वार्टजाइट, ग्रेनिट,

पट्टित जैस्पर तथा अल्पसिलिक कायान्तरित शैलों से बनी है। विशेषरूप से उल्लेखनीय तथ्य यह है कि कुछ गुटिकाएँ कोणीय तथा उपकोणीय भी हैं। संगुटिकाश्म कहीं कहीं धारा दुर्मिका चिन्ह धारा संस्तर, अवसर्पण संरचनाएँ प्रदर्शित करता है। संगुटिकाश्म का बलुआ संस्तरों में पार्श्वक्रमण भी स्पष्ट रूप से देखा गया है। संगुटिकाश्म के आश्मिक अध्ययन से यह निष्कर्ष निकाला गया है कि भोपाल के संगुटिकाश्म के उद्गम क्षेत्र अन्तर्द्रोणीय तथा बहिर्द्रोणीय दोनों ही प्रकार के हैं। श्विटझाप[15] के अनुसार जैसा कि पेटीझोन[12] ने उद्धरण दिया है कि इस प्रकार के संगुटिकाश्म को वाह्य शैल समूही विविधावसादी वर्ग का माना जाना चाहिये। संगुटिकाश्म का बलुआ संस्तरों में पार्श्वक्रमण यह इंगित करता है कि संगुटिकाश्म संस्तर तटप्रदेशीय पुलीय संचय ही है (होम्स [6])।

भोपाल के बलुआ संस्तरों का जो विन्ध्य समूह की भाण्डेर श्रेणी में आते हैं, भू-विज्ञान वर्णन पेस्कोई [11] ने किया है। तदनुसार चटर्जी [2] तथा रायजादा [4] ने भी इनका अध्ययन किया है किन्तु इनमें से किसी ने भी भोपाल के बलुआपत्थरों में स्थित संगुटिकाश्म का कहीं भी वर्णन नहीं किया है। लेखक ने इन संगुटिकाश्म संस्तरों का अध्ययन कर सर्वप्रथम उनकी उपस्थिति की सूचना दी। संगुटिकाश्म के अध्ययन का व्यौरा नीचे दिया गया है।



चित्र 1. भोपाल का भांडेर बलुआपत्थर

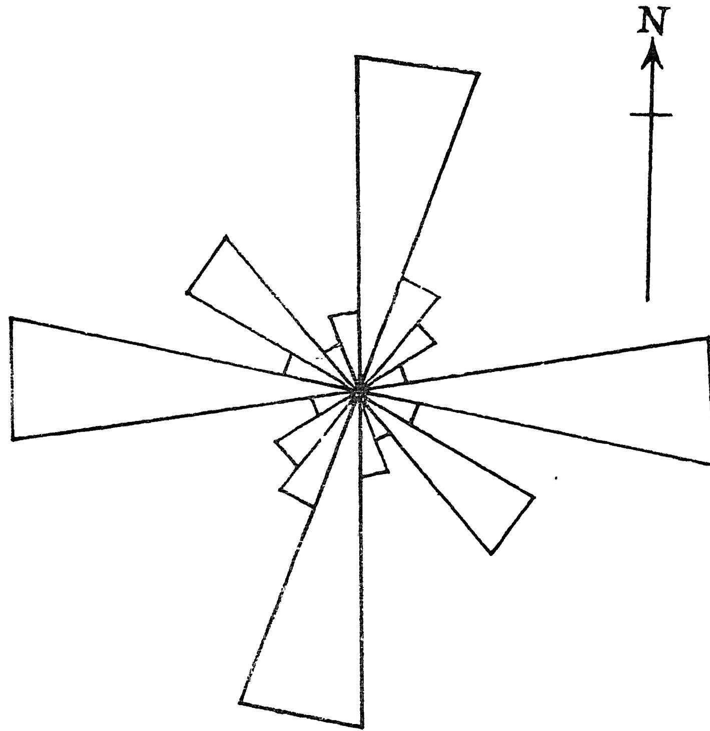
क्षेत्रीय अवलोकन:– बलुआ संस्तरों के साथ अन्तरासंस्तरित संगुटिकाश्म के प्रमुख तीन स्तर देखे गए हैं। इनके दृश्यांश (1) सुभाष नगर रेलवे क्रासिंग के समीपस्थ पहाड़ी पार्श्व, (2) भदभदा पहाड़ी



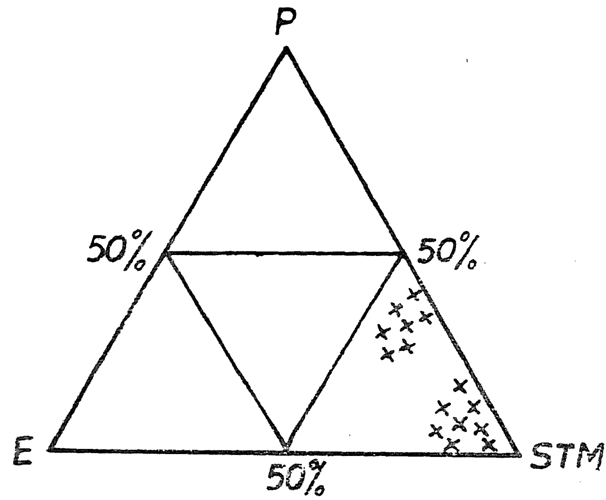
चित्र 2. संगुटिकाश्म में समकलीन वलन



चित्र 3. संगुटिकाश्म की गुटिका



चित्र 4. भोपाल की संगुटिकाश्म में अश्मों का अनुस्थापन



चित्र 5 : संगुटिकाश्म का स्थलीय संघटन—E विस्फोटी, stm अवसादी एवं कायान्तरित, p प्लुटोनिक

पार्श्व (3) श्यामला पहाड़ी का दक्षिणी पार्श्व, में देखे जा सकते हैं (चित्र 1)। इन स्तरों की मोटाई 1 फीट से 5 फीट तक ही देखी गई है। इन स्तरों में कहीं कहीं (कुछ इन्च मोटाई के) पतले सिल्ट के अन्तरासंस्तरित स्तर भी पाये जाते हैं। संगुटिकाश्म बलुआ संस्तरों में पार्श्वक्रमित भी होता है। संधियों के एक ही प्रतिरूप संगुटिकाश्म संस्तर पर जाते हैं। पार्श्वक्रमिक बलुआ पत्थर के अपक्षय से भूरी पीली मृत्तिका निर्मित होती है जो उनके दृश्यांशों के समीप देखी जाती है।

संगुटिकाश्म के खण्डों का आकार कुछ इन्चों से लेकर कुछ फीट तक देखा गया है। ये खण्ड बहुतायत से गोलाकार अथवा उप-गोलाभ हैं। कोणीय अथवा उपकोणीय खण्ड क्वचित ही देखे गये हैं। उत्तर तथा उत्तर पूर्व दिशाओं में खण्डों की साइज बढ़ती हुई देखी गई है। उत्तर दिशा में संगुटिकाश्म स्तर मोटे होते जाते हैं तथा बलुआ संस्तरों एवं संगुटिकाश्म स्तरों में विभेद करना कठिन हो जाता है। संगुटिकाश्म के सबसे बड़े खण्ड की साइज 5′ 3″ नापी गई है। इन साइज मापों के आधार पर तथा पेटीझोन के वर्गीकरण [12] के अनुसार इस संगुटिकाश्म को खण्डाश्म-संगुटिकाश्म कहा जा सकता है। श्यामला पहाड़ी के उत्तरी पार्श्व में सूक्ष्मकणिक ग्रेनिटक के खण्ड संगुटिकाश्म में पाये गये हैं।

संरचनाएँ

संगुटिकाश्म स्तरों में अर्धविकसित धारा संस्तरण देखे गये हैं जिसमें गोलाश्मिकाएँ एवं गुटिकाएँ संस्तरण दिशा के अनुरूप व्यवस्थित हुई हैं। 1464 क्वार्टर्स टी० टी० नगर, भोपाल, के समीप किए गए वेध छिद्र से प्राप्त क्रोड के नमूने में संगुटिकाश्म में समकालीन वलन देखा गया है (चित्र 2)। हरा क्रोड नमूने में शेल-संगुटिकाश्म अन्तरासंस्तरण स्पष्ट है।

संगुटिकाश्म की गुटिकाएँ सपाट अथवा चपटी हैं। इनका सपाट औसतन 1.36 पाया गया है (चित्र 3)।

संगुटिकाश्म की गुटिकाएँ 20 से 60 के बीच नति होती हुई उ०उ०पू० और प० उ० प० दिशाओं में अनुस्थापन दिखाती हैं (चित्र 4)।

अश्म विज्ञान

संगुटिकाश्म विभिन्न प्रकार के क्वार्टजाइट, चर्ट वेन-क्वार्ट्ज, पट्टित जैस्पर, ग्रेनिट तथा अल्पसिलिक आग्नेय एवं कायान्तरित शैलों के स्थूलदर्शी खण्डों से मिलकर बना है। इन खण्डों का लौहयुक्त सिलिका द्वारा सीमेंटीभवन हुआ है। संगुटिकाश्म की सरन्ध्रता 1 प्रतिशत के करीब निर्धारित की गई है जो शैल की संहतता की परिचायक है।

संगुटिकाश्म की गुटिकाओं को अलग अलग कर प्रत्येक शैल प्रकार का प्रतिनिधित्व करने वाली गुटिकाओं के सूक्ष्मदर्शी गुण सारणी 1 में सारणीकृत किए गए हैं।

सारणी 1

सेक्शन न०	खनिजात्मक संघटन	गठन एवं सीमेंट	शैल प्रकार तथा प्रकृति
(10)	कोणीय । उपकोणीय स्फटिक के कण	लौह युक्त बालुकामय सीमेंट	क्वार्टजाइट (बहिर्द्रोणीय)
(13)	स्फटिक और एपीडोट खनिज में परिवर्तन दिखाने वाले फेल्सपार के कण	समकणिक अंश स्वरूपी गठन	ग्रेनिट (बहिर्द्रोणीय)
(12)	मुख्य घटक स्फटिक स्पिनेल बायोटाइट तथा स्फटिक कणों में अपारदर्शी खनिज के अन्तर्वेश	अपदलनी	क्वार्टजाइट (बहिर्द्रोणीय)
(1)	तत्रजात वृद्धि दिखाने वाले स्फटिक के गोलाकार कण	बालुकामय सीमेंट	आर्थो क्वार्टजाइट (अन्तर्द्रोणीय)
(3)	एपीडोट, एन्थोफिलाइट के कण	कायान्तर क्रिस्टली, शिस्टी, गठन	शिस्ट (बहिर्द्रोणीय)
(9)	औजाइट, लेब्रेडोराइट अपारदर्शी खनिज, कांच	पुँजित फेनो क्रिस्टी तथा निविष्ट कांची गठन	बेसाल्ट (बहिर्द्रोणीय)
(11)	औजाइट, लेब्रोडोराइट, अपार-दर्शी निविष्ट कांची कांच	ओफाइटी तथा उप-ओफाइटी गठन	डोलेराइट (बहिर्द्रोणीय)

विभिन्न आश्मिक प्रकारों की सांख्यिकीय गणना की गई । यह गणना तीन स्थानों पर क्रमशः (अ) सुभाष नगर रेलवे क्रसिंग, सेक्शन (ब) भदभदा हिल सेक्सन, तथा (स) श्यामला पहाड़ी के दक्षिणी पार्श्व 1 फुट 1 फुट के ग्रिड बना कर की गई । इन नमूनों की बारम्बारता का वितरण सारणी 2 में दिया गया है । भोपाल संगुटिकाश्म के विभिन्न अश्म प्रकारों की औसत बारम्बारता का वितरण भी दिया गया है ।

संगुटिकाश्म का मोड़ पेटीजोन [13] के दिये हुए त्रिकोणीय रेखाचित्र में प्लाट किया गया (चित्र 5) । यह देखा गया है कि प्लाट किये गए मूल्य एस + एम क्षेत्र में ही पड़ते हैं तथा यह इंगित करते हैं कि भोपाल संगुटिकाश्म अवसादित एंव कायान्तरित जनक क्षेत्र का है ।

निष्कर्ष :—संगुटिकाश्म का बलुआ संस्तरों में पार्श्वक्रमण पुलिन संचयों का परिचायक है (होम्स 1965 पृ०817)। संगुटिकाश्म के स्तरों का बलुआ संस्तरों के साथ अन्तरासंस्तरित होना समुद्री जल तल के बारम्बार ज्वारीय प्रभाव से बढ़ने-घटने को सूचित करता है। संगुटिकाश्म की गुटिकाएँ उत्तर 10^0 पूर्व तथा 80^0

सारणी 2

संगुटिकाश्म के अश्म प्रकारों की बारम्बारता का वितरण

नमूना सं०	स्थान सूचक	क्वार्टजाइट %	चर्ट %	ग्रेनिट %	अल्पसिलिक शैल%	वेन क्वार्ट्ज %
1.	(अ)	47.23	25.20	13.30	4.00	10.30
2.	(अ)	52.50	15.00	11.25	30.50	16.25
3.	(अ)	52.25	12.50	17.50	2.50	18.50
4.	(अ)	42.20	23.75	20.00	1.25	15.00
5.	(ब)	47.50	25.00	17.50	1.25	8.75
6.	(ब)	52.50	18.75	12.50	5.00	11.25
7.	(ब)	50.02	18.20	10.19	8.10	10.20
8.	(ब)	46.10	15.40	12.30	6.00	20.00
9.	(ब)	44.00	11.20	9.00	11.20	25.00
10.	(स)	56.20	18.00	6.40	5.60	14.40
11.	(स)	52.00	18.00	6.00	2.00	22.00
12.	(स)	56.25	15.00	10.00	3.75	15.00
13.	(स)	47.10	25.70	7.13	2.90	17.10
14.	(स)	50.54 ??	16.48	20.08	2.31	16.48
15.	(स)	38.68	18.66	9.33	13.33	20.00
		50.68	18.29	11.56	4.82	15.63

भोपाल संगुटिकाश्म के अश्म प्रकारों की औसत बारम्बारता

पश्चिम दिशाओं में प्रमुख अनुस्थापन दिखाती हैं। ये दोनों दिशाएं पुराधाराओं की दिशाएं हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि गुटिकाओं का अनुस्थापन समुद्री ड्रिफ्ट से प्रभावित हुआ है। समकणिक बालुकाश्म में बड़े बड़े खन्डों का पाया जाना लहरों के पश्च धावन को सूचित करता है। संगुटिकाश्म की गुटिकाओं की सपाटता 166 कैलियर [1] के समुद्री संचयों के कणों के लिए दिए मूल्यों से मिलती-जुलती है। अवसादी संरचनाएँ जैसे धारा संस्तरण प्रिंट, पंक विदर इत्यादि उथल जल की परिस्थितियों को इंगित करती हैं।

गुटिकाएँ, गोलाश्म इत्यादि की साइज उत्तर तथा उत्तर पूर्व दिशा की ओर बढ़ती जाती है जिससे यह प्रतीत होता है कि तट रेखा भोपाल विन्ध्य-शैलों के बेसिन के उ० पूर्व दिशा की ओर होना चाहिये।

संगुटिकाश्म के अश्म प्रकारों की औसत बारम्बारता तथा त्रिकोण रेखाचित्र (पेटीझोन)[13] यह सूचित करते हैं कि संगुटिकाश्म, वाह्य शैल समुद्री बहुअवसादीय वर्ग का है तथा अवसादीय एंव कायान्तरित बहिर्द्रोणीय जनक क्षेत्र का है।

निर्देश

1. केलियर क्सएन्ड्री, **बुलेटिन सोसा० जिओला० फ्रांस**, 1954, **6**, 4, 643-646
2. चटर्जी, ए०सी०, **जर्न० आफ दी इन्स्टीट्यूट जिओलाजी, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन**, 1969;
   चटर्जी, ए० सी० **क्वार्टर० रिस० जर्नल, विक्रम विश्वविद्यालय**, 1963, **7**, न०1, 27-29
   चटर्जी, ए० सी०, **साइन्स एन्ड कल्चर**, 1964, **30** **न० 9**, 450-451
3. फ्रेसर, एच० जे०, **जर्न० जिओला०** 1935, 43, 910-1010
   चटर्जी, ए० सी०, **प्रोसी०** 5.7, **इन्डियन साइन्स कांग्रेस, प्लेट** 3, सेक्शन 5, 168
4. ग्रेगरी, एच० ए०, **अमे० जर्न० आफ सान्इस** 1915, **39**, 300-364
5. ग्रोगन, आर० एम०, **जर्न० सेडी० पेट्रोल**, 1954, **15**, 3-12
6. होम्स, ए०, **प्रिन्सिपलस् आफ फिजिकल जिओलाजी**, 1965, नेल्सन
7. क्रम्बेन, डव्ल्यू० सी०, **जर्न० जिओलाजी**, 1939, 47, 67, 673-706
8. कोप्स्टेन, एफ० पी० एच० डव्ल्यू०, **रिज्क्सुनी बर्स्टएट ग्रोनिएंजेन**, 1954, 57-64
9. लेन्डोन, आर० ई०, **जर्न० आफ जिओलाजी**, 1936, **3सी**, 437-446
10. लेनै, ई० डब्ल्यू तथा कार्लसन, ई०जे०, **ट्रान्स० अमे० जिओफिजिकल यूनियन** 1954, **35**, 45-462
11. पेस्कोई, ई० एच०, **ए मेन्युअल आफ जिओलाजी आफ इन्डिया एन्ड बर्मा**, 1959
12. पेटीझोन, एफ० जे०, **सेडीमेंटरी राक्स**, हार्पर एन्ड ब्रदर्स, 1957
13. पेटीझोन, एफ० जे०, **बुलेटिन जिऔला० सोसा० अमेरिका**, 1934, **45**
14. रायजादा, आर० के०, **वसुन्धरा**, 1959, **5**, 61-64
15. स्विटझाप, एम० एस०, **जर्न० सेडीमे० पेट्रोलाजी**, 1935, **5**, 109
16. ट्वेन हाफेल, डव्ल्यू०एच०, **जर्न० सेडीमे० पेट्रोलाजी**, 1947, **17**, 117-128
17. वेन्टवर्थ, सी० के०, **जर्न० आफ जिओलाजी**, 1922, **30**, 378-392
18. वेन्टवर्थ, सी० के०, **यू० यस० जी० एस० प्रोफे० पेपर**, 1922, 377-392

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 121-126

संयुग्मी श्रेणी के द्वारा लिपशिट्ज श्रेणी के फलनों की सन्निकटन कोटि

के० कुरेशी

गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—अक्टूबर 23, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रमेय A में प्राप्त फल को संयुग्मी श्रेणी (1·2) के लिये प्रसारित करना है।

Abstract

On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of a conjugate series. *By* K. Qureshi, Department of Mathematics, Sagar University, Sagar.

The object of this paper is to extend the result obtained in Theorem A to the Conjugate Series (1·2).

1· परिभाषाएँ

माना f आवर्त 2π के साथ आवर्ती है और लेबेस्क के अर्थ में समाकलनीय है। इसकी फूरियर श्रेणी को

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

द्वारा दिया जाता है तो

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \tag{1·2}$$

$f(x)$ की संयुग्मी श्रेणी कहलाता है।

माना कि $\{p_n\}$ धनात्मक अचरों का एक ऐसा अनुक्रम है कि

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 \cdots + p_n \to \infty \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty.$$

माना कि

$$t_n = \frac{p_n s_0 + p_{n-1}\, s_1 + p_{n-2}\, s_2 + \ldots + p_0 s_n}{P_n} \tag{1·3}$$

यदि $t_n \to s$ ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ तो हम यह कहते हैं कि $\{s_n\}$ संकलनीय नारलुंड या S में संकलनीय (N, p_n) है।

फलन $f \in \text{lip}\ \alpha (\alpha > 0)$ यदि (1·4)

$$f(x+h) - f(x) = 0(|h|^{\alpha})$$

2. प्रस्तावना

प्रेमचन्द्र[1] ने फलन के सन्निकटन की कोटि पर निम्नलिखित प्रमेय को फूरियर श्रेणी के (R, p_n) माध्यों द्वारा सिद्ध किया है।

प्रमेय A

आवर्ती फलन f जिसका आवर्त 2π है और Lip α श्रेणी से सम्बद्ध है उसके सन्निकटन की कोटि को उसकी फूरियर श्रेणी के (R, p_n) माध्यमों द्वारा निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\underset{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}{} |f(x) - T_n(x)| = \begin{cases} 0\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}; & 0 < \alpha < 1 \\[2ex] 0\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right) \log \dfrac{P_n}{p_n}; & \alpha = 1 \end{cases}$$

जहाँ (R, p_n) माध्य नियमित हैं और $n \geqslant 0$ के साथ $0 < p_n \uparrow$

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रमेय A में सिद्ध किये हुये फल को (N, p_n) माध्यों का प्रयोग करते हुये संयुग्मी श्रेणी (1·2) में विस्तारित करना है। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ धनात्मक तथा अ-वर्धमान हो तो आवर्तीफलन f जिसका आवर्त $2\pi'$ है और अपनी संयुग्मी श्रेणी के (N, p_n) माध्यों द्वारा Lip α श्रेणी से सम्बद्ध है तो उसे

$$|\bar{f}(x) - \bar{t}_n(x)| = 0\left[\frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{k^{\alpha}}\right]$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ $\bar{t}_n(x)$ श्रेणी (1·2) के (N, p_n) माध्य हैं।

प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

[साहनी तथा गोयल[2] प्रमेयिका 1]

यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ धनात्मक तथा अ-वर्धमान हो तो $a>0$ के लिए

$$\frac{1}{n^a}\leqslant\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{a+1}} \tag{2·1}$$

प्रमेयिका 2

[मकफैडेन[3] प्रमेयिका 5·1]

यदि $\{p_n\}$ अनृण तथा अ-वर्धमान हो तो $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$; $0\leqslant t\leqslant\pi$ तथा कोई भी n,

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k\, e^{i(n-k)t}\right|\leqslant p(t^{-1}) \text{ किसी भी } a \text{ के लिए} \tag{2·2}$$

प्रमेय की उपपत्ति

हम $\bar{S}_k(x)=\sum_{n=1}^{k}(b_n \cos nx-a_n \sin nx)$ लेंगे।

चूँकि

$$\bar{S}_k(x)-\bar{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right\}dt$$

तो हम देखेंगे कि

$$\bar{t}_k(x)-\bar{f}(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(\bar{S}_k(x)-\bar{f}(x))+0(1)$$

$$=\frac{1}{\pi P_n}\left|\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\{f(x+t)-f(x-t)\}\times\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos\ nt}{t}\right\}dt+0(1)\right.$$

तो $$|\bar{t}_n(x)-\bar{f}(x)|=0\left[\frac{1}{P_n}\int^{\pi}t^a\left|\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right\}dt\right]+0(1)\right.$$

$$=0\left[\frac{1}{P_n}\int_0^{\pi/n}t^a\left|\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right\}\right|dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^a\left|\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right\}\right|dt\right]+0(1)$$

हम लिखेंगे कि

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_{n-k}}{p_n}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right\}$$

अत: हम प्राप्त करेंगे कि

$$|\bar{f}(x)-\bar{t}_n(x)|=0\left[\int_0^{\pi/n}t^{\alpha}\,|J_n(t)|\,dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}\left\{\frac{\sin kt}{kt^2}-\frac{\cos kt}{t}\right.\right|dt\right\}+0(1)$$

$$=I_1+I_2+0(1) \text{ माना}$$

अब $0<t\leqslant\pi/n$ में समान रूप से, हमें प्राप्त है :

$$|J_n(t)=0\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{p_{n-k}}{P_n}\right|\{kt^2\}\right]$$

$$=0(n).$$

अब

$$I_1=O\left[n\int_0^{\pi/n}t^{\alpha}\,dt\right]$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right] \text{ प्रमेयिका 1 से}$$

और भी

$$I_2=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}\frac{\sin kt}{kt^2}\right|dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}\frac{\cos kt}{t}\right|dt\right]$$

$$=I'_2+I''_2 \text{ माना}$$

$$I'_2=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{t^2}\left|\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}\frac{\sin kt}{k}\right|dt\right]$$

आबेल के रूपान्तर को व्यवहृत करने पर

$$=0\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^{\alpha-2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left|\sum_{\mu=0}^{k}p_{n-\mu}\sin\mu t\right|\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\sum_{k+1}^{n}p_{n-k}\sin kt\,\frac{1}{n}\right|\right\}dt\right]$$

$$=0\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}t^{\alpha-2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}P\left(\frac{1}{t}\right)+P\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{n}\right\}dt\right]$$

प्रमेयिका 2 से

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{n}\right\}P\left(\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-2}\,P\left(\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{n/\pi}^{1/\pi}\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha-2}P(t)\left(-\frac{dt}{t^2}\right)\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{n/\pi}^{1/\pi}\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}P(t)\,dt\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{\alpha}}\right] \text{ जहाँ } P(k)=p(k)$$

पुनश्च:

$$I_2''=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{t}\left|\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}\cos kt\right|\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-1}\,P\left(\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right]$$

जो I_2' के मूक चर से प्रभावित है। अतः I_1, I_2', I_2'' मूक चर जोड़ने से वांछित फल प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विभागाध्यक्ष डा० पी० एल० शर्मा का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. प्रेमचन्द, Nanta Mathematics, 1975, VIII 88.91.
2. साहनी, बी० एन० तथा गोयल, डी० एस० , **राँची यूनि० मैथ० जर्न०**, 1973, **4**, 50-53.
3. मैकफैडेन, एल०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1942, **9**.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 127-132

संयुग्मी फूरियर श्रेणी की यूलर संकलनीयता

आर० बी० सक्सेना
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त--जनवरी 17, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य संयुग्मी फूरियर श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)$$

की $(E, 1)$ संकलनीयता के लिये अनुरूपी प्रमेय सिद्ध करना है।

Abstract

Euler summability of conjugate Fourier series. *By* R. B. Saxena, Department of Mathematics and Statistics, University of Sagar, Sagar.

The object is to prove an analogous theorem for $(E, 1)$ summability of the conjugate Fourer series.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)$$

1. माना $f(x) \in L[0, 2\pi]$ तथा इस परास के बाहर 2π आवर्त के साथ आवर्ती है। माना फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी को

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x),$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है और यह मान लिया जाय कि सामान्यता में किसी प्रकार की क्षति के बिना

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0.$$

$f(x)$ को संयुग्मी फूरियर श्रेणीको (1·1) द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x). \tag{1·1}$$

पूर्ववत् लिखेगें कि

$$\psi(t) = \{f(x+t) - f(x-t)\}.$$

परिभाषा

माना $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ दी हुई श्रेणी है और $s_n = \sum_{m=0} c_m$.

यह श्रेणी संकलनीय कहलाती है यदि $2^{-n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} s_n$ सीमा s की ओर अग्रसर हो ज्यों ज्यों $n \to \infty$

हार्डी[1] तथा नाप[3] ने यूलर संकलनीयता की और जिगमुंड[4] ने फूरियर श्रेणी की यूलर संकलनीयता की विवेचना की है।

हालैंड, साह्नी तथा जिमबालरियो[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय A

यदि $\int_0^t |\phi(t)| dt = 0(t),\ t \to 0^+$

और

$$\lim_{n \to \infty} \int_{2\pi/n}^{\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t+2\pi/n)|}{t} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

जहाँ η अचर है। तो f की फूरियर श्रेणी विन्दु x पर s के यूलर-संकलनीय $(E, 1)$ है ।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1·1) की $(E, 1)$ संकलनीयता के लिये एक अनुरूपी प्रमेय सिद्ध करता है जो निम्नवत् है ।

2. प्रमेय : यदि

$$\int_0^t \frac{|\psi(t)|}{t} = 0(t),\ t \to 0^+, \tag{2·1}$$

संयुग्मी समाकल का अस्तित्व हो तथा

$$\lim_{n\to\infty}\int_{2\pi/n}^{\eta}\frac{|\psi(t)-\psi(t+2\pi/n)|}{t}\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)=0 \tag{2·2}$$

जहाँ η अचर है। तो श्रेणी (1·1) संयुग्मी फलन $\bar{f}(x)$ की यूलर संकलनीय $(E, 1)$ है।

उपपत्ति

(1·1) के m कोटि के $\bar{s}_m$ का आंशिक योग निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है।

$$\bar{s}_m=\bar{f}(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt+0(1). \tag{2·3}$$

$\bar{s}_m$ के यूलर रूपान्तर $(E, 1)$, n का प्रयोग करने पर

$$\bar{\sigma}_n-\bar{f}_{(x)}+0(1)=-\frac{1}{\pi 2^{n+1}}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\frac{t}{2}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos mt\,dt$$

$$=-\frac{1}{\pi 2^{n+1}}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\frac{t}{2}\,.\,R\left\{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}e^{imt}\right\}dt$$

$$=-\frac{1}{\pi 2^{n+1}}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\left(\frac{t}{2}\right).\,R(1+e^{it})^n\,dt$$

$$=-\frac{1}{\pi 2^{n+1}}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\left(\frac{t}{2}\right)2^n\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$

हम लिखेंगे कि

$$\bar{\sigma}_n-\bar{f}(x)+0(1)=-\left\{\int_0^{2\pi/n}+\int_{2\pi/n}^{(2\pi/n)^{\alpha}}+\int_{(2\pi/n)^{\alpha}}^{\pi}\right\}\frac{\psi(t)}{2\pi}$$

$$\times\cot\frac{t}{2}\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt \tag{2·4}$$

$$=-\frac{1}{2}(I_1+I_2+I_3)\ \text{माना, जहाँ}\ 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

पुनः हम लिखेंगे कि

$$\frac{2\pi}{n}=a(n)\ \text{तथा}\ \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\alpha}=b(n).$$

अब

$$I_1\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{a(n)}\frac{\psi(t)}{t}\,dt$$

$$=0(1), \text{ संयुग्मी समाकल के अस्तित्व के कारण} \qquad (2{\cdot}5)$$

पुनः

$$I_3 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{b(n)}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \cos^n \left(\frac{t}{2}\right) . \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

निर्देश[2] की तरह अग्रसर होने पर

$$I_3 = 0(1). \qquad (2{\cdot}6)$$

पुनः हमें ज्ञात है कि

$$2\pi\ I_9 \leqslant 2 \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t} \cos^n \left(\frac{t}{2}\right) . \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$= \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t} \cos^n \left(\frac{t}{2}\right) . \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$- \int_{0}^{b(n)-a(n)} \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t+2\pi/n} \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$= \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)-\psi(t+2\pi/n)}{t} \cos^n \left(\frac{t}{2}\right) . \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$+ \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t+2/n)}{t} \left[\cos^n \left(\frac{t}{2}\right) - \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$+ \int_{a(n)}^{b(n)} \psi\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2\pi/n}\right] . \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$- \int_{0}^{a(n)} \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t+2\pi/n} \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$+ \int_{b(n)-a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t+2\pi/n} \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5, \text{ माना} \qquad (2{\cdot}7)$$

परिकल्पना के अनुसार

$$|\ J_1\ | = 0(1). \qquad (2{\cdot}8)$$

तथा

$$|\ J_4\ | \leqslant \int_{0}^{a(n)} \left| \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t+2\pi/n} \cos^n \left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \right| dt$$

$$\leqslant \int_{a(n)}^{2a(n)} \frac{|\psi(t)|}{t} \left|\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\right| . \left|\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right| dt$$

$$\leqslant \frac{1}{a(n)} \int_{a(n)}^{2a(n)} |\psi(t)|\, dt$$

$$= 0(1)$$

(2·9)

अपरञ्च

$$|J_5| \leqslant \int_{b(n)-a(n)}^{b(n)} \left| \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t+2\pi/n} \cos^n\left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right| dt$$

$$\leqslant \int_{b(n)}^{2b(n)} \frac{|\psi(t)|}{t} \left|\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt$$

$$= 0(1).$$

(2·10)

अब

$$|J_3| \leqslant \frac{2\pi}{n} \int_{a(n)}^{b(n)} |\psi(t+2\pi/n)| . \left|\cos^n\left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) \frac{1}{t(t+2\pi/n)}\right| . \left|\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right| dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{n}\right) \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{|\psi(t+2\pi/n)|}{t(t+2\pi/n)}\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने और (2·1) का उपयोग करने पर

$$|J_3| = 0(1).$$

(2·11)

अन्त में

$$J_2 = \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t+2\pi/n)}{t} \left[\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) - \cos^n\left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

अवकल कलन के माध्य मान प्रमेय के द्वारा

$$\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) - \cos^n\left(\frac{t+2\pi/n}{2}\right) = -\frac{\pi}{n}\, n \cos^{n-1}\left(\frac{\xi}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \sin\frac{\xi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos^{n-1}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\frac{\xi}{2}$$

जहाँ

$$t < \xi < t + 2\pi/n < 2t.$$

इस प्रकार

$$| J_2 | \leqslant \int_{a(n)}^{b(n)} | \psi(t+2\pi/n) | \frac{\pi}{2} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{a(n)}^{b(n)} | \psi(t+2\pi/n) | dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[0(t+2\pi/n) \Big]_{a(n)}^{b(n)}$$

$$= \frac{\pi}{2} 0[b(n)-a(n)]$$

$$= 0(1). \tag{2·12}$$

फलतः (2·7) से (2·12) तक यह अनुगमन होता है कि

$$I_2 = 0(1). \tag{2·13}$$

इस प्रकार (2·4), (2·5), (2·6) तथा (2·13), के परिप्रेक्ष्य में यह प्रमेय पूर्ण है।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, **क्लैरडान प्रेस, आक्सफोर्ड**, 1967
2. हालैंड, ए० एस०, साहनी, बी० एन० तथा जिम्बालैरियो, टी०, Bolletino U. M. I.,, 1975, **12** (4), 315-20.
3. नॉप, के०, Math. *Z.*, 1922, **15**, 226-253; 1923, **18**, 125-156.
4. जिगमुंड, ए०, Trigonometric Series, **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981 Pages, 133-146

3H-परिवर्त पर कुछ प्रमेय

सी० के० शर्मा
गणित विभाग, एस० ए० टेकनिकल इंस्टीच्यूट, विदिशा

[प्राप्त—अगस्त 28, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में $3H$-परिवर्त से सम्बन्धित शृंखला गुणों की विवेचना की गई है तथा प्राप्त परिणामों को चार प्रमेयों के रूप में वर्गीकृत किया गया है।

Abstract

Some theorems on 3H-transform. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics, S. A. Technical Institute, Vidisha.

In this paper, the chain properties connecting the $3H$-transform have been discussed and the results obtained have been classified into four theorems.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र में $3H$-परिवर्त को सम्बद्ध करने वाले शृंखल गुणों की विवेचना की गई है। $3H$--परिवर्त निम्नवत् परिभाषित है

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma \left|\begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0);\, (b_q, \beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L, \alpha'_L)\\(B_0, \beta'_0),\, (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu \left|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right.\right] f(x)\, dx, \quad (\cdot 1)$$

बशर्ते कि $\sigma>0$, $\sigma'>0$, $\mu>0$; $x\neq 0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $\beta'<R(B_0/\beta'_0)<\delta'$, $|\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^\mu|<\frac{1}{2}\lambda''\pi\ (\lambda''>0)$, जहाँ

$$H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu \left|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right.\right]=\begin{cases}O(|x|^{\delta''}), & \text{लघु } x \text{ के लिये}\\ O(|x|^{\beta''}), & \text{दीर्घ } x \text{ के लिये}\end{cases}$$

$$\delta''=\min R(d_i/\delta_i)\ (i=1, 2, \ldots f), \tag{1·2}$$

$$\beta''=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)(i=1, 2, \ldots, g), \tag{1·3}$$

$$\lambda''=\sum_{1}^{g}\gamma_j-\sum_{g+1}^{u}\gamma_j+\sum_{1}^{f}\delta_j-\sum_{f+1}^{v}\delta_j>0, \tag{1·4}$$

$$A_3=\sum_{1}^{v}\delta_j-\sum_{1}^{u}\gamma_j>0 \tag{1·5}$$

और इसी प्रकार $\delta, \beta, \lambda, A_1$ तथा $\delta', \beta', \lambda', A_2$ प्रथम दो फलनों के लिये आए हैं, तथा अन्य ज्ञात परिवर्त यथा लैप्लास परिवर्त, टिचमार्श के H_v, V_v परिवर्त[9] तथा पाठक[6] का $J^u_{v,\lambda}$-परिवर्त । इस प्रकार प्राप्त परिणामों को चार प्रमेयों में वर्गीकृत किया गया है । इन प्रमेयों पर आधारित अनेक उदाहरण दिए गए हैं जिससे अनेक ज्ञात तथा अज्ञात समाकलों का मान प्राप्त हुआ है जिनमें H-फलनों के गुणनफल[3] तथा अन्य विशिष्ट फलन सन्निहित रहते हैं ।

2· प्रमेय I

यदि $\phi(p)=3H[f(x)]$

तथा $f(x)$ लैप्लास परिवर्त हो $g(y)$ का, तो

$$\phi(p)=\frac{1}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_{r'}}\,c^{-\rho'}\prod_{j=1}^{m}\surd((b_j-\beta_j\rho_r))\prod_{j=1}^{n}\surd((1-a_j+\alpha_j\rho_r))}{r!\,r'!\,p^{r'+1}\prod_{j=m+1}^{q}\surd((1-b_j+\beta_j\rho_r))\prod_{j=n+1}^{l}\surd((a_j-\alpha_j\rho_r))}$$

$$\times H^{M+g+1,N+f}_{L+v,Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\middle|\begin{matrix}A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M)(1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\\\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

$$\times\int_0^\infty y^{r'}\,g(y)\,dy, \tag{2·1}$$

जहाँ $\rho_r=\frac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho'=\frac{r'+\rho+\sigma\rho_r}{\mu}$;

बशर्ते कि समाकल $\int_0^\infty g(y)\,dy$ तथा $\int_0^\infty y^{r'}\,g(y)\,dy$, $r'\geqslant0$ का अस्तित्व हो $\sigma, \sigma', \mu>0$, $R(-\rho)<\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta''$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi$ $(\lambda''>0)$.

तथा

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xy}\, g(y)\, dy=\frac{1}{x+b}\,.$$

अतः प्रमेय के अनुसार

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\,(x+b)^{-1}\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[\, a(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),\ (b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\ \alpha'_L)\\(B_0,\beta_0),(B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\frac{1}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\, a^{\rho_r}\, c^{-\rho'}\prod_{j=1}^{m}\surd((b_j-\beta_j\rho_r))\prod_{j=1}^{n}\surd((1-a_j+\alpha_j\rho_j))}{r!\,(bp)^{r'+1}\prod_{j=m+1}^{q}\surd((1-b_j+\beta_j\rho_r))\prod_{j=n+1}^{l}\surd((a_j-\alpha_j\rho_r))}$$

$$\times H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\left|\begin{matrix}(A_N,\ \alpha'_N),\ (1-d_v-\rho'\delta_v,\ \frac{\sigma'}{\mu}\ \delta_v),\ (A_{N+1},\ \alpha'_{N+1}),\ \ldots,\ (A_L,\ \alpha'_L)\\(B_0,\ \beta'_0),\ (B_M,\ \beta'_M),\ (1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\ \gamma_u),\ (B_{M+1},\ \beta_{M+1})\\ \ldots,\ (B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right], \qquad (2\cdot5)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ और $\rho'=\dfrac{r'+\rho+\sigma\rho_r}{\mu}$;

बशर्ते कि $\sigma,\ \sigma',\ \mu,\ b>0,\ R(-\rho)<\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta''$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi$ $(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

उदाहरण 2

माना $g(y)=y^{-\mu_1-1/2}\, k_{v+1/2}(by)$.

अब ज्ञात फल [1, p. 270(z)] का उपयोग करने पर

$$f(x)=\frac{\pi^{1/2}\,(-\mu_1+\nu+1)!\,(-\mu_1\div\nu)!}{(2b)^{1/2}}\,(x^2-b^2)^{\mu_1/2}\,P_\nu^{\mu_1}(x/b), \qquad (2\cdot6)$$

जहाँ $R(\mu_1)-1<R(\nu)<-R(\mu_1)$.

पुनः उसी फल [1, p. 331(26)] को सम्प्रयुक्त करने पर

$$\int_0^\infty y^{r'}\, g(y)\, dy=b^{-r'+\mu_1-1/2}\, z^{r'-\mu_1-3/2}\,(\tfrac{1}{2}r'-\tfrac{1}{2}\mu_1-\tfrac{1}{2}\nu)!\,(\tfrac{1}{2}r'-\tfrac{1}{2}\mu_1+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})!,$$

बशर्ते कि $R(\mu_1)-1<R(\nu)<-R(\mu_1)$.

अन्त में प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}(x^2-b^2)^{\mu_1/2}\, P_\nu^{\mu_1}(x/b)\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma \middle|{(a_l,\alpha_l) \atop (b_0,\beta_0),(b_q,\beta_q)}\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\middle|{(A_L,\alpha'_L) \atop (B_0,\beta'_0),(B_Q,\beta'_Q)}\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\middle|{(c_u,\gamma_u) \atop (d_v,\delta_v)}\right]dx \qquad (2{\cdot}8)$$

$$=\frac{(2b)^{1/2}}{\sqrt{(\pi)}\,\mu\beta_0(-\mu_1+\nu+1)!\,(-\mu_1-\nu)!}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_r}\,c^{-\rho'}\,b^{-r'+\mu_1-1/2}\,z^{r'-\mu_1-3/2}}{r!\,r'!\,p^{r'+1}}$$

$$\times(\tfrac{1}{2}r'-\tfrac{1}{2}\mu_1-\tfrac{1}{2}\nu)!\,(\tfrac{1}{2}r'-\tfrac{1}{2}\mu_1+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})!\,\frac{\prod_{j=1}^{m}\sqrt{((b_j-\beta_j\rho_r))}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{((1-a_j+\alpha_j\rho_r))}}{\prod_{j=m+1}^{q}\sqrt{((1-b_j+\beta_j\rho_r))}\prod_{j=n+1}^{Q}\sqrt{((a_j-\alpha_j\rho_r))}}$$

$$\times H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\middle|\frac{(A_N,\alpha'_N),(1+d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)}{(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q,\beta'_Q)}\right]$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ और $\rho'=\dfrac{(r'+\rho+\sigma\rho_r)}{\mu}$;

बशर्ते कि $R(\mu_1)-1<R(\nu)<-R(\mu_1)$; $\sigma,\sigma',\mu>0$, $R(-\rho)<\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta''$, $|\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^\mu|>\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

3. प्रमेय II.

यदि $\phi(p)=3H[f(1)]$ (3·1)

तथा $g(p)=H_\nu[f(x)]$, (3·2)

तो
$$\phi(p)=\frac{p^{\rho-1}}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_r}\,e^{-\rho'}\,p^{\sigma\rho_r-\mu\rho'}\,(-\nu-r')!}{r!\,r'!\,z^{\nu+2r'}\,(-\nu-r'-\frac{1}{2})!\,(\nu+r'+3/2)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\sqrt{((b_j-\beta_j\rho_r))}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{((1-a_j+\alpha_j\rho_s))}}{\prod_{j=m+1}^{q}\sqrt{((1-b_j+\beta_j\rho_r))}\prod_{j=n+1}^{l}\sqrt{((a_j-\alpha_j\rho_r))}}\;H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\right|$$

$$\left|\begin{matrix}(A_N, \alpha'_N), (1-d_v-\rho'\delta_v, \frac{\sigma'}{\mu}\delta_v), (A_{N+1}, \alpha'_{N+1}), \ldots, (A_L, \alpha'_L)\\ (B_0, \beta'_0), (B_M, \beta'_M), (1-c_u-\rho'\gamma_u, \frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u), (B_{M+1}, \beta'_{M+1}), \ldots, (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

$$\int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\, g(y)\, dy, \tag{3·3}$$

जहाँ $\rho_r=\frac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho'=(\rho+\sigma\rho_r+\nu+2r'+\frac{1}{2})/\mu$;

बशर्ते कि समाकल $\int_0^\infty y^{1/2}\, g(y)\, dy$ तथा $\int_0^\infty y^{2r'+\nu+1/2}\, g(y)\, dy$ का अस्तित्व हो ; σ, σ', $\mu>0$, $R(\rho+\frac{1}{2}\nu+\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta'')>0$, $R(\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta'')<0$, $-\frac{1}{2}<R(\nu)<0$, $|\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^\mu|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$g(p)=\int_0^\infty (px)^{1/2}\, H_\nu(px)\, f(x)\, dx,\ R(p)>0, |R(\nu)|<\tfrac{1}{2}. \tag{3.4}$$

टिचमार्श[9] ने (3·4) के लिए जो प्रतिलोम सूत्र दिया है वह निम्नवत् है

$$f(p)=\int_0^\infty (px)^{1/2}\, \gamma_\nu(py)\, g(y)\, dy,\ R(p)>0,\ |R(\nu)|<\tfrac{1}{2}. \tag{3·5}$$

अब (3·5) से $f(x)$ का मान (3·1) में रखने पर तथा समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\phi(p)=p^{\rho-1}\int_0^\infty y^{1/2}\, g(y)\, dy\int_0^\infty x^{\rho-1/2}\gamma_\nu(xy)\ \ H_{l,q+1}^{m+1,\,n}\left[a(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0),(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L, \alpha'_L)\\(B_0, \beta'_0), (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right.\right] dx. \tag{3·6}$$

अन्त में (2·4) से प्रथम H-फलन के लिए घात श्रेणी प्रसार का मान रखने पर तथा

$$\gamma_\nu(x)=H_{1,3}^{2,0}\left[\frac{x^2}{4}\left|\begin{matrix}(-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, 1)\\-\frac{1}{2}\nu, 1), (\frac{1}{2}\nu, 1), (-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, 1)\end{matrix}\right.\right],$$

के लिए जो

$$\gamma_\nu(x)=\sum_{r'=0}^\infty\frac{(-1)^{r'}\surd((-\nu-r'))}{r'!\surd((\frac{3}{2}+\nu+r'))\surd((-\nu-\frac{1}{2}-r'))}(x/2)^{\nu+2r'}, \tag{3·7}$$

के रूप में (2·4) में $(\frac{1}{2}\nu, 1)$ के लिए (b_0, β_0) मानने पर प्राप्त होता है और जो $-\frac{1}{2}<R(\nu)<0$ के लिए वैध है; समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर परिवर्तित कर लेने पर, जो वैध है तथा परिणामी समाकल का मान ज्ञात फल[4] से निकालने पर, हमें दिया हुआ प्रमेय प्राप्त होता है।

उदाहरण

माना $g(y)=y^{1/2\nu-1/2}\, e^{y^2/2b^2}\, W_{1/4\nu,\, 1/2+1/4\nu}(y^2/b^2)$.
तो एर्डेल्यी [2, p. 167(24)] के अनुसार

$$f(x)=\frac{\sqrt{(\pi)}!\, b^{1/2\nu+1}\sqrt{(x)}\, e^{bx^2/8}}{2\cos\frac{1}{2}\nu x\,(-\frac{1}{2}\nu)!}K_{1/2\nu}(b^2x^2/8), \tag{3·8}$$

जहाँ $|\arg b|<\frac{3}{4}\pi$ तथा $-\frac{3}{2}<R(\nu)<0$.

पुनः एर्डेल्यी [1, p. 336(7)] के अनुसार

$$\int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\, g(y)\, dy=\frac{b^{3/2\nu+2r'+1}\,(\frac{1}{2}+\nu+r')!}{2}\beta(\tfrac{1}{2}+r'+\tfrac{1}{2}, -\nu-r'-\tfrac{1}{2}), \tag{3·9}$$

जहाँ $|\arg b|<\frac{3}{4}\pi$ तथा $-\frac{3}{2}<R(\nu)<0$.

अतः प्रमेय का प्रयोग करने पर निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है:

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, x^{1/2}\, e^{b^2x^2/8}\, K_{1/2\nu}(b^2x^2/8)\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0), (b_q, \beta_q)\end{matrix}\right] \tag{3·10}$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\middle|\begin{matrix}(A_L, \alpha'_L)\\(B_0, \beta'_0), (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\middle|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\nu\pi\,(-\frac{1}{2}\nu)!\, p^{\rho-1}}{\sqrt{(\pi)}\,\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}(b/2)^{\nu+2r'}\, a^{\rho_r}\, c^{-\rho'}\, p^{\sigma\rho_r-\mu\rho'}(-\nu-r')!(\frac{1}{2}+\nu+r')}{r!\, r'!\,(-\nu-r'-\frac{1}{2})!\,.\,(\nu+r'+3/2)!}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\sqrt{((b_j-\beta_j\rho_r))}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{((1-a_j+\alpha_j\rho_r))}}{\prod_{j=m+1}^{q}\sqrt{((1-b_j+\beta_j\rho_r))}\prod_{j=n+1}^{l}\sqrt{((a_j-\alpha_j\rho_r))}}\beta(\tfrac{1}{2}\nu+r'+\tfrac{1}{2}, -\nu-r'-\tfrac{1}{2})$$

$$\times H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\middle|\begin{matrix}(A_N, \alpha'_N), (1-d_v-\rho'\delta_v, \frac{\sigma'}{\mu}\delta_v), A_{N+1}, \alpha'_{N+1}), \ldots, (A_L, \alpha'_L)\\(B_0, \beta'_0), (B_M, \beta'_M), (1-c_u-\rho'\gamma_u, \frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u), (B_{M+1}, \beta'_{M+1}),\\ \ldots, (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho' = (\rho + \sigma\rho_r + \nu + 2r' + \frac{1}{2})/\mu$;

बशर्ते कि $|\arg b| < \frac{3}{4}\pi$, $-\frac{3}{2} < R(\nu) < 0$, σ, σ', $\mu > 0$, $R(\rho + \frac{1}{2} + \mu + \sigma\delta + \sigma'\delta' + \mu\delta'') > 0$, $R(\rho + \sigma\beta + \sigma'\beta' + \mu\beta'') < 0$, $-\frac{1}{2} < R(\nu) < 0$, $|\arg ap^{\sigma}| < \frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda > 0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}| < \frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda' > 0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}| < \frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda'' > 0)$.

4. प्रमेय III.

यदि $$\phi(p) = 3H[f(x)] \tag{4·1}$$

तथा $$g(p) = y_\nu[f(x)], \tag{4·2}$$

तो $$\phi(p) = \frac{p^{\rho}}{\mu\beta_0} \frac{1}{} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty}$$

$$\frac{(-1)^{r+r'} a^{\rho_r} c^{-\rho'} p^{\sigma\rho_r - \mu\rho'} \prod_{j=1}^{m} \surd((b_j - \beta_j\rho_r)) \prod_{j=1}^{n} \surd((1 - a_j + \alpha_j\rho_r))}{r!\, r'!\, 2^{1+\nu+2r'} (\frac{3}{2} + \nu + r')!\, (\frac{3}{2} + r')! \prod_{j=m+1}^{q} \surd((1 - b_j + \beta_j\rho_r)) \prod_{j=n+1}^{l} \surd((a_j - \alpha_j\rho_r))}$$

$$\times H^{M+g+1, N+f}_{L+v, Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}} \middle| \begin{matrix} (A_N, \alpha'_N), (1 - d_v - \rho'\delta_v, \frac{\sigma}{\mu}\gamma_v), (A_{N+1}, \alpha'_{N+1}), \ldots, (A_L, \alpha'_L) \\ (B_0, \beta'_0), (B_M, \beta'_M), (1 - c_u - \rho'\gamma_u, \frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u), (B_{M+1}, \beta'_{M+1}), \\ \ldots, (B_Q, \beta'_Q) \end{matrix}\right]$$

$$\times \int_0^{\infty} y^{\nu + 2r' + 3/2} g(y)\, dy, \tag{4·3}$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho' = (\rho + \sigma\rho_r + \nu + 2r' + 3/2)/\mu$;

बशर्ते कि समाकल $\int_0^{\infty} y^{1/2} g(y)\, dy$ तथा $\int_0^{\infty} y^{\nu+2r'+3/2} g(y)\, dy$ का अस्तित्व हो। $\sigma, \sigma', \mu > 0$, $R(\rho + \frac{3}{2} + \nu + \sigma\delta + \sigma'\delta' + \mu\delta'') > 0$, $R(\rho + \sigma\beta + \sigma'\beta' + \mu\beta'') < 0$, $|R(\nu)| < \frac{1}{2}$, $|\arg ap^{\sigma}| < \frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda > 0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}| < \frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda' > 0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}| < \frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda'' > 0)$.

उपपत्ति

प्रमेय II के ही समान।

उदाहरण

माना $g(y) = G^{k,\xi}_{s,t}\left(by^2 \middle| \begin{matrix} e_1, \ldots, e_s \\ f_1, \ldots, f_t \end{matrix}\right)$.

तो एर्डेल्यी [2, p. 172(47)] के द्वारा

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2b)}}\,G^{\xi+1,k+1}_{t+1,s+3}\left(\frac{x^2}{4b}\middle|\begin{matrix}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-f_1,\ \frac{1}{2}-f_2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}-f_t\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-e_1,\frac{1}{2}-e_2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}-e_s,\ \frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right), \tag{4·4}$$

जहाँ $s+t<2(k+\xi)$, $|\arg b|<(k+\xi-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t)\pi$, $R(e_j)<\min(1, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu)$ $(j=1, 2, \ldots, \xi)$, तथा $R(2f_j+\nu)>-\frac{5}{4}(j=1, 2, \ldots, k)$.

पुनः एर्डेल्यी के ही परिणाम [1, p. 337(14)] को प्रयुक्त करने पर

$$\int_0^\infty y^{\nu+2r'+3/2}\,g(y)\,dy=\tfrac{1}{2}b^{-\rho_{r'}}\frac{\prod_{j=1}^{k}\sqrt{((f_j+\rho_{r'}))}\prod_{j=1}^{\xi}\sqrt{((1-e_j-\rho_{r'}))}}{\prod_{j=k+1}^{t}\sqrt{((1-f_j-\rho_{r'}))}\prod_{j=\xi+1}^{s}\sqrt{((e_j+\rho_{r'}))}} \tag{4·5}$$

जहाँ $\rho_{r'}=\frac{1}{2}\nu+r'+\frac{5}{4}$;

बशर्ते कि (4·4) के प्रतिबन्धों की तुष्टि होती हो।

अन्त में, प्रमेय के सम्प्रयोग से निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\,H^{m+1,n}_{l,q+1}\left[a(px)^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_l,\alpha_l)\\(b_0,\beta_0),(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma'}\middle|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

$$\times H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^\mu\middle|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right]G^{\xi+1,k+1}_{t+1,s+3}\left(\frac{x^2}{4b}\middle|\begin{matrix}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-f_1,\ \frac{1}{2}-f_2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}-f_t\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-e_1,\ \frac{1}{2}-e_2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}-e_s,\ \frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{(2b)}\,p^{\rho-1}}{2\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_r}\,b^{-\rho_{r'}}\,c^{-\rho'}\,p^{\sigma\rho_r-\mu\rho'}}{r!\,r'!\,2^{1+\nu+2r'}\,(\frac{3}{2}+\nu+r')!\,(\frac{3}{2}+r')!}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\sqrt{((b_j-\beta_j\rho_j))}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{((1-a_j+\alpha_j\rho r))}\prod_{j=1}^{k}\sqrt{(f_j+\rho_{r'})}\prod_{j=1}^{\xi}\sqrt{(1-e_j-\rho_{r'})}!}{\prod_{j=m+1}^{q}\sqrt{((1-b_j+\beta_j\rho_r))}\prod_{j=n+1}^{l}\sqrt{((a_j-\alpha_j\rho_r))}\prod_{j=k+1}^{t}\sqrt{((1-f_j-\rho_{r'}))}\prod_{j=\xi+1}^{s}\sqrt{((e_j+\rho_{r'}))}}$$

$$\times H^{M+g+1,N+f}_{L+v,Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\middle|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),\ (1-d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),\ (A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ \ldots,\ (A_L,\alpha'_L)\\ (B_0,\beta'_0),\ (B_M,\beta'_M),\ (1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),\ (B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ \ldots,\ (B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right],$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=\frac{1}{2}\nu+r'+\frac{5}{2}$ तथा $\rho'=(\rho+\sigma\rho_r+\nu+2r'+3/2))/\mu$;

बशर्ते कि (4·4) में दिए गए तथा उपर्युक्त प्रमेय के प्रतिबन्धों की तुष्टि हो।

5. प्रमेय IV

यदि $\phi(p)=3H[f(x)]$ (5·1)

तथा $f(x)=J^{\mu_1}_{v,\lambda_1}[g(y)],$ (5·2)

तो
$$\phi(p)=\frac{p^{\rho-1}}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,2^{-\nu-2\lambda_1-2r'}\,x^{\rho_r}\,c^{-\rho'}\,p^{\sigma\rho_r-\mu\rho'}}{r'!\,r!\,(1+\lambda_1+r')!\,(1+\lambda_1+\nu+\mu_1 r)'!}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\surd((b_j-\beta_j\rho_r))\prod_{j=1}^{n}\surd((1-a_j+\alpha_j\rho_r))}{\prod_{j=m+1}^{q}\surd((1-b_j+\beta_j\rho_r))\prod_{j=n+1}^{l}\surd((a_j-\alpha_j\rho_r))}H^{M+g+1,N+f}_{L+v,Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\right|$$

$$\left|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\\\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

$$\int_0^\infty y^{\nu+2\lambda_1+2r'+1/2}\,g(y)\,dy, \qquad (5\cdot3)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho'=(\rho+\sigma\rho_r+\nu+2\lambda_1+2r'+\tfrac{1}{2})/\mu;$

बशर्ते कि समाकल $\int_0^\infty y^{1/2}\,g(y)\,dy$ तथा $\int_0^\infty y^{\nu+2\lambda_1+2r'+1/2}\,g(y)\,dy$ का अस्तित्व हो। $\sigma,\ \sigma',$ $\mu>0$, $\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta''<R(-\rho)<\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta''+\tfrac{1}{2}+\nu+2\lambda_1$, $|\arg ap^{\sigma}|<\tfrac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\tfrac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$·

उपपत्ति

(1·1) के द्वारा व्यक्त व्यंजक $\phi(p)$ में

$$f(x)=\int_0^\infty (xy)^{1/2}\,J^{\mu_1}_{\nu,\lambda_1}(xy)\,g(y)\,dy, \qquad (5\cdot4)$$

के हेतु प्रतिस्थापित करने तथा समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\phi(p)=p^{\rho-1}\int_0^\infty y^{1/2}\,g(y)\,dy\int_0^\infty x^{\rho-1/2}\,J^{\mu_1}_{v,\lambda_1}(xy)\,H^{m+1,n}_{l,q+1}$$

$$\left[a(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_l,\alpha_l)\\(b_0,\beta_0),(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right] \qquad (5\cdot5)$$

$$\times H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]dx.$$

अब (2·4) में से प्रथम H-फलन के लिए श्रेणी प्रसार का मान रखने तथा $J^{\mu_1}_{\nu,\lambda_1}(xy)$ के लिए

$$J^{\mu_1}_{\nu,\lambda_1}(x)=\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'}\,(\tfrac{1}{2}x)^{\nu+2r'+2\lambda_1}}{(1+\lambda_1+r')!\,(1+\lambda_1+\nu+\mu_1 r')!},\ \mu_1>0, \tag{5·6}$$

से मान रखने पर, जो (3·7) की ही तरह की विधि का प्रयोग करने पर सरलता से निर्देश[6] से प्राप्त होता है तथा आन्तरिक फलन का मान निर्देश[4] की सहायता से निकालने पर हमें उपर्युक्त प्रमेय प्राप्त होता है।

(5·5) में समाकलन के क्रम में परिवर्तन की वैधता बताने के लिए पहले हम देखेंगे कि

$$J^{\mu_1}_{\nu,\lambda_1}(x)=\begin{cases}0(x^{\nu+2\lambda_1}), & \text{लघु } x \text{ के लिए}\\ 0(x^{-1/2}), & \text{दीर्घ } x \text{ में लिए}\end{cases}$$

(5·5) में x-समाकल पूर्णतया अभिसारी होगा यदि $R(\rho+\frac{1}{2}+\nu+2\lambda_1+\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta'')>0$, $R(\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta'')<0$ एवं (5·5) में y समाकल पूर्णतया अभिसारी होगा यदि समाकल $\int_0^\infty y^{1/2}\,g(y)\,dy$ एवं $\int_0^\infty y^{\nu+2\lambda_1+1/2+2r'}\,g(y)\,dy$ का अस्तित्व हो। अत: ऊपर कथित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत समाकलन का क्रम वैध है बशर्ते कि परिणामी समाकल (5·5) पूर्णतया अभिसारी हो।

उपप्रमेय

उपर्युक्त प्रमेय में $\lambda_1=0$ तथा $\mu_1=1$ रखने पर $J^{\mu_1}_{\nu,\lambda_1}(x)$ समानीत होता है बेसेल फलन $J_0(x)$ में और हमें निम्नलिखित फल मिलते हैं

यदि $\phi(p)=3H[f(x)]$ एवं $f(x)$ हैंकेल परिवर्त हो $g(y)$ का तो

$$\phi(p)=\frac{p^{-\nu-3/2}}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_r}\,c^{-\rho'}\,p^{-2r'}\prod_{j=1}^{m}\surd((b_j-\beta_j\rho_r))\prod_{j=1}^{n}\surd((1-a_j+a_j\rho r)}{r!\,r'!\,2^{\nu+2r'}(1+r')!\,(\nu+r'+1)!\prod_{j=m+1}^{q}\surd(1-b_j+\beta_j\rho_r)!\prod_{j=n+1}^{l}\surd((a_j-a_j\rho_r))}$$

$$\times H^{M+g+1,N+f}_{L+v,Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\left|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times \int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\, g(y)\, dy,$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho' = \rho + \sigma\rho_r + \nu + 2r' + \frac{1}{2})/\mu$; (5·7)

बशर्ते कि $\sigma, \sigma', \mu > 0$, समाकल $\int_0^\infty y^{1/2}\, g(y)\, dy$ तथा $\int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\, g(y)\, dy$ का आस्तित्व हो; $\sigma\beta + \sigma'\beta' + \mu\beta'' < R(-\rho') < \sigma\delta + \sigma'\delta' + \mu\delta'' + \frac{1}{2} + \nu$, $|\arg ap^{\sigma}| < \frac{1}{2}\lambda\pi (\lambda > 0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}| < \frac{1}{2}\lambda'\pi$ $(\lambda' > 0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}| < \frac{1}{2}\lambda''\pi (\lambda'' > 0)$.

उदाहरण 1

माना $g(y) = H_{s,t}^{k,l_1}\left[by^{\nu_1} \middle| \begin{matrix} (A'_s, \eta_s) \\ (B'_t, \xi_t) \end{matrix} \right]$.

तो राठी[7] के ज्ञात समाकल का सम्प्रयोग करने पर

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} \cdot H_{s+2,t}^{k,\, l_1+1}\left[b(2/x)^{\nu_1} \middle| \begin{matrix} (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu_1), (A'_s, \eta_s), (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu_1) \\ (B'_t, \xi_t) \end{matrix} \right], \tag{5·8}$$

बशर्ते कि $x, \nu_1 > 0$, $R(3/2 + \nu + \nu_1\delta''') > 0$, $R(1 + \nu_1\beta''') < 0$, $|\arg b| < \frac{1}{2}\lambda'''\pi (\lambda''' > 0)$, जहाँ $\delta''' = \min R(B'_h/\xi_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$, $\beta''' = \max R\left(\dfrac{A'_i - 1}{\eta_i}\right)$ $i = 1, 2, \ldots, l_1)$ $\lambda'' \equiv \sum_1^{l_1} \eta_j - \sum_{l_1+1}^{s} \eta_j + \sum_1^{k} \xi_j - \sum_{k+1}^{t} \xi_j > 0$ तथा $A''' \equiv \sum_1^{t} \xi_j - \sum_1^{s} \eta_j > 0$.

पुनः

$$\int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\, g(y)\, dy = \frac{b^{-\rho_{r'}} \prod_{j=1}^{k} \surd((\beta_j + \xi_j\rho_{r'})) \prod_{j=1}^{l_1} \surd((1 - A_j - \eta_j\rho_{r'}))}{\nu_1 \prod_{j=k+1}^{t} \surd((1 - \beta_j - \xi_j\rho_{r'})) \prod_{j=l_1+1}^{s} \surd(A_j + \eta_j\rho_{r'}))}, \tag{5·9}$$

जहाँ $\rho_{r'} = (\nu - \nu_1 + 2r' + \frac{5}{2})/\nu_1$;

बशर्ते कि $\nu_1 > 0$, $\nu_1\beta''' < R(-\nu - 3/2) < \nu_1\delta'''$, $|\arg b| < \frac{1}{2}\lambda'''\pi (\lambda''' > 0)$ तथा (5·7), से

$$\int_0^\infty x^{\rho-2}\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^{\sigma} \middle| \begin{matrix} (a_l, \alpha_l) \\ (b_0, \beta_0), (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right] H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'} \middle| \begin{matrix} (A_L, \alpha'_L) \\ (B_0, \beta'_0), (B_Q, \beta'_Q) \end{matrix} \right]$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^{\mu} \middle| \begin{matrix} (c_u, \gamma_u) \\ (d_v, \delta_v) \end{matrix} \right] H_{s+2,t}^{k,l+1}\left[b(2/x)^{\nu_1} \middle| \begin{matrix} (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu_1), (A'_s, \eta_s), (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu_1) \\ (B'_t \cdot \xi_t) \end{matrix} \right] dx$$

$$=\frac{p^{-\rho-\nu-1/2}}{\sqrt{2}\,\nu_1\,\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}\,a^{\rho_r}\,b^{-\rho_{r'}}\,c^{-\rho}\,p^{\sigma\rho_r-\rho_{r'}}\prod_{j=1}^{m}\sqrt{}((b_j-\beta_j\rho_r))\prod_{j=1}^{n}\sqrt{}((1-a_j+\gamma_j\rho_r))}{r!\,r'!\,2^{\nu+2r'}\sqrt{}((1+r'))\sqrt{}((\nu+r'+1))\prod_{j=m+1}^{q}\sqrt{}((1-b_j+\beta_j\rho_r))\prod_{j=n+1}^{l}\sqrt{}((a_j-\alpha_j\rho_r))}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{k}\sqrt{}((B_j+\xi_j\rho_{r'}))\prod_{j=1}^{l_1}\sqrt{}((1-A_j-\eta_j\rho_{r'}))}{\prod_{j=k+1}^{t}\sqrt{}((1-B'_j-\xi_j\rho_{r'}))\prod_{j=l_1+1}^{s}\sqrt{}((A_j+\eta_j\rho_{r'}))}\,H^{M+g+1,N+f}_{L+v,Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\left|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'\delta_v,\frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'\gamma_u,\frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right],\qquad(5\cdot10)$$

जहाँ $\rho_r=\frac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=(\nu-\nu_1+2r'+5/2)/\nu_1$ तथा $\rho'=(\nu+\rho+\sigma\rho_r+2\nu+1/2)/\mu$;

बशर्ते कि $\sigma,\sigma',\mu,\nu_1>0,\nu_1\beta'''<R(-\nu-3/2)<\nu_1\delta''',\beta'''<-\frac{3}{2\nu_1}<\delta''',\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta''<R(-\rho)<\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta''+\frac{1}{2}+\nu$, $|\arg ap\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$ तथा $|\arg b|<\frac{1}{2}\lambda'''\pi(\lambda'''>0)$.

उदाहरण 2

माना $g(y)=y^{\nu+1/2}\,e^{-\beta_1 y^2}\,L^{\nu}_{n_1}(\alpha_1 y^2)$.

अब ज्ञात फल [2, p. 43(5)] के सम्प्रयोग से

$$f(x)=2^{-\nu-1}\beta_1^{-\nu-n_1-1}(\beta_1-\alpha_1)^{n_1}\,x^{\nu+1/2}\,e^{-x^2/4\beta_1}\,L^{\nu}_{n_1}\left[\frac{\alpha_1x^2}{4\beta_1(\alpha_1-\beta_1)}\right],\qquad(5\cdot11)$$

बशर्ते कि $R(\beta_1)>0$ तथा $R(\nu)>0$.

पुनः एर्डेल्यी के ज्ञात फल [1, p. 324(4)] को व्यवहृत करने पर

$$\int_0^\infty y^{\nu+2r'+1/2}\,g(y)\,dy=\frac{(\nu+r'+1+n_1)!\,(\beta_1-\alpha_1)^{n_1}}{2\alpha_1^{\nu+r'+1+n_1}\,n_1!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n_1,&-r'\\-\nu&r'-n_1\end{matrix};\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}\right],\qquad(5\cdot12)$$

बशर्ते कि $R(\nu)>0$, $R(\beta_1)>0$.

अतः उपर्युक्त प्रमेय के उपप्रमेय को प्रयुक्त करते हुए

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, x^{\nu+1/2}\, e^{-x^2/4\beta_1}\, L_{n_1}^{\nu}\left[\frac{\alpha_1 x^2}{4\beta_1(\alpha_1-\beta_1)}\right] H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_l,\alpha_l)\\ (b_0,\beta_0),\ (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'} \middle| \begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\ (B_0,\beta'_0),\ B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\ (d_v,\delta_v)\end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{2^\nu\, \beta_1^{\nu+n_1+1}}{(\beta_1-\alpha_1)^{n_1}} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+r'}\, a^r\, c^{-\rho' } p^{-2r'-\nu-3/2}\, \surd((\nu+r'+1+n_1))\, (\beta_1-\alpha_1)^{n_1}}{r!\, r'!\, 2^{\nu+2r'}\, \surd((1+r'))\, \surd((\nu+r'+1))\, \alpha_1^{\nu+r'+n_1+1}\, n_1!}$$

$$\times {}_2F_1\left[-n_1,\ -r';\ -\nu-r'-n;\ \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}\right] \frac{\prod_{j=1}^{m}\surd((b_j-\beta_j\rho_r))\ \prod_{j=1}^{n}\surd((1-a_j+\alpha_j\rho_r))}{\prod_{j=m+1}^{q}\surd((1-b_j+\beta_j\rho_r))\ \prod_{j=n+1}^{l}\surd((a_j-\alpha_j\rho_r))}$$

$$\times H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}} \middle| \begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),\ (1-d_v-\rho'\delta_v,\ \frac{\sigma'}{\mu}\delta_v),\ (A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ \dots,\ (A_L,\alpha'_L)\\ (B_0,\beta'_0),\ (B_M,\beta'_M),\ (1-c_u-\rho'\gamma_u,\ \frac{\sigma'}{\mu}\gamma_u),\ (B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ \dots,\ (B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right], \tag{5·13}$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_9+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho'=(\rho+\sigma\rho_r+\nu+2r'+\frac{1}{2})/\mu$;

बशर्ते कि $R(\nu)>0$, $R(\beta_1)>0$, $R(\rho+\frac{1}{2}+\nu+\sigma\delta+\sigma'\delta'+\mu\delta'')>0$, $R(\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta'')<0$, $|\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda'$ तथा $|\arg cp^\mu|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.
2. वही, Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, 1954.
3. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.
4. गुप्ता के० सी० तथा जैन, यू० सी०, अप्रकाशित परिणाम 1966.
5. मुकर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, एजुकेशन, 1971, **5**, 5-12.
6. पाठक, आर० एस०, प्रोसी० नेशनल एके० साइंस इंडिया, 1966, **36A**, 81-86.
7. राठी, पी० एन०, प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०, 1967, **63**, 1077-1081.
8. शर्मा, सी० के०, Port. Mathematica, 1974, **33**.
9. टिचमार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, आक्सफोर्ड, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24 No. 2, April, 1981, Pages 147-159

सार्वीकृत बहुपदी सेट $A_{a_2n}(x, y)$ का अध्ययन

श्रीकान्त तथा आर० एन० पाण्डेय
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 3, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में x तथा y दो चरों वाले बहुपदी सेट $A_{a_2n}(x, y)$ को बर्चनाल तथा चांडी के संकेतन में दो चरों वाले सार्वीकृत एपेल फलन के एक जनक फलन की सहायता से व्यवकलित किया गया है।

Abstract

A study of generalized polynomial set $\{(A_{a_2n}(x; y)\}$. *By* Shri Kant and R. N. Pandey, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The present paper presents a systematic study of a polynomial set $\{A_{a_2n}(x, y)\}$ obtained with the help of a generating function with contains generalized Appell function in the notation of Burchnall and Chaundy. A number of interesting results for classical and non-classical polynomials such as Hermite, Legendre, Bedient and Rice etc. have been arrived at.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य x तथा y दो चरों वाले बहुपदी सेट $\{A_{a_2n}(x, y)\}$ को बर्चनाल तथा चांडी [1] के संकेतन में दो चरों वाले सार्वीकृत एपेल फलन वाले एक जनक फलन की सहायता से व्यवकलित किया गया है।

1·1 संकेत तथा सूत्र

[A] (i) $(n)=1, 2, \ldots, n.$

(ii) $(a_p)=a_1, a_2, \ldots, a_p.$

(iii) $[(a_p)]_n=\prod_{i=1}^{p} (a_i)_n=(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n.$

(iv) $[(a_p)+m(p)]=\prod_{i=1}^{p} (a_i+m_i).$

(v) $[(a_p)]=a_1 a_2 \ldots a_p.$

(vi) $\triangle(a; b)=\frac{b}{a}, \frac{b+1}{a}, \ldots, \frac{b+a-1}{a}.$

(vii) $\triangle_k[a; b]=\prod_{r=1}^{a}\left(\frac{b+r-1}{a}\right)_k=\left(\frac{b}{a}\right)_k \left(\frac{b+1}{a}\right)_k \cdots \left(\frac{b+a-1}{a}\right)_k.$

(viii) $\triangle_1[a; b]=\prod_{r=1}^{a} \left(\frac{b+r-1}{a}\right)=\triangle[a; b].$

(ix) $\triangle_k[m; (a_p)]=\prod_{i=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{a_i+r-1}{m}\right)_k.$

(X) $\triangle(m; (a_p))=\left(\frac{a_i+r-1}{m}\right)_{\substack{r=1, m \\ i=1, p}}.$

[B] (i) $[(a_p)]_{n-mk}=\frac{[(a_p)]_n(-m)^{+mpk}}{\triangle_k[m; 1-(a_p)-n]}$

(ii) $[(a_p)]_{n+mk}=[(a_p)]_n (m)^{mpk} \triangle_k[m; (a_p)+n].$

(iii) $(a)_{n-k}=\frac{(-1)^k(a)_n}{(1-a-n)_k}$

(iv) $(n-mk)!=\frac{n! (-m)^{-mk}}{\triangle_k [m; -n]}$

(v) $(n+mk)!=n! (m)^{mk}\triangle_k[m; 1+n].$

2. परिभाषा

सार्वीकृत बहुपदी सेट $\{A_{\alpha_2 n}(x, y)$ को हम निम्नलिखित जनक फलन द्वारा परिमाषित करते हैं

$$(1-\nu_1\; x^{c_1}\, y^{c_2}\, t^{\alpha_1})^{-\lambda}\; F\left[\begin{matrix}(a_r);\ (a_p^*);\ (\alpha_u^*); \\ (b_s);\ (b_q^*);\ (\beta_v^*);\end{matrix}\ \frac{\mu\; x^{c_1'}\, t^{\alpha_2}}{(\nu_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}\, t^{\alpha_1}-1)^{m_1}},\ \frac{\nu\; y^{c'_2}\, t^{\alpha_3}}{(1-\nu_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}\, t^{\alpha_1})^{m_2}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} A^{\lambda;\ \mu;\ \nu;\ c'_1;\ c'_2;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ (a_r);\ (a_p^*);\ (\alpha_u^*)}_{\alpha_2 n;\ \nu_1;\ c_1:\ c_2;\ m_1;\ m_2;\ \alpha_1;\ (b_s);\ (b_q^*);\ (\beta_v^*)}(x, y)\; t^{\alpha_2 n}. \qquad (2\cdot1)$$

(2·1) के वाम पक्ष में बर्चनाल तथा चांडी के संकेतनों के अनुसार दो चरों का एपेल फलन पाया जाता है।

उपर्युक्त सार्वीकृत बहुपदी सेट में अनेक प्राचल हैं अतः सरलता की दृष्टि से हम

$$A^{\lambda;\ \mu;\ \nu;\ c'_1;\ c'_2;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ (a_r);\ (a_p^*);\ (\alpha_u^*)}_{\alpha_2 n;\ \nu_1;\ c_1;\ c_2;\ m_1;\ m_2;\ \alpha_1;\ (b_s);\ (b_q^*);\ (\beta_v^*)}(x, y)$$

को $\{A_{\alpha_2 n}(x, y)\}$ के संकुचित संकेत से अंकित करेंगे जब तक कि किसी एक प्राचल में ($\alpha_2 n$ को छोडकर) कोई परिवर्तन न हो। यदि किसी प्राचल में परिवर्तन होता है तो उसी को सूचित किया जायगा जिसमें कोई परिवर्तन हुआ हो। उदाहरणार्थ

$$A^{\lambda;\ \mu+1;\ \nu;\ c'_1;\ c'_2;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ (a_r);\ (a_p^*);\ (\alpha_u^*)}_{\alpha_2;n;\ \nu_1;\ c_2;\ m_1;\ m_2;\ \alpha_1;\ (b_s);\ (b_q^*);\ (\beta_v^*)}(x, y)=A^{\mu+1}_{\alpha_2 n}(x, y)$$

प्रमेय 1

यदि सार्वीकृत बहुपदी सेट को (2·1) द्वारा परिभाषित किया जाय तो

$$A_{\alpha_2 n}(x, y)=\sum_{k=0}^{[n/d_1]}\sum_{l=0}^{[n/d_2]}\frac{[(a_r)]_{n-r_1k-d_2l}\,[(a_p^*)]_{n-d_1k-d_2l}\,](\alpha_u^*)]_k}{[(b_s)]_{n-r_1k-d_2l}\,[(b_q^*)]_{n-d_1k-d_2l}\,[(\beta_v^*)]_k}$$

$$\frac{(-1)^{m_1(n-d_1k-d_2l)}\,(\mu)^{n-d_1k-d_2l}\,\nu^k}{(n-d_1k-d_2l)!}\,\frac{\nu_1^{\,l}\,x c_1^{\prime(n-d_1k-d_2l)+c_1l}}{k!\,l!}$$

$$\frac{y c_2^{\prime k+c_2l}\,(\lambda)_{m_1n+(m_2-m_1d_2)k-(m_1d_2-1)l}}{(\lambda)_{m_1n+(m_2-m_1d_1)k-m_1d_2l}}. \qquad (2\cdot2)$$

उपपत्ति

प्रसार

$$F\left[\begin{matrix}(a_r):\ (A_p);\ (\alpha_u); \\ (b_s);\ (B_q);\ (\beta_v);\end{matrix}\ x, y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(a_r)]_{n+k}[(A_p)]_n[(\alpha_u)]_k\; x^n\, y^k}{[(b_s)]_{n+k}[(B_q)]_n[(\beta_v)]_k\; n!\; k!} \qquad (2\cdot3)$$

को प्रयुक्त करने पर

समीकरण (2·1) को निम्नलिखित रूप प्रदान किया जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha_2 n}(x, y) t^{\alpha_2 n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(a_r)]_{n+k}[(a_p^*)]_n[(\alpha_u^*)]_k}{[(b_s)]_{n+k}[(b_q^*)]_n[(\beta_v^*)]_k} \frac{\mu^n \nu^k \nu_1^l}{n!}$$

$$\frac{x^{c_1'n+c_1 l}\, y^{c_2'k+c_2 l}\, (-1)^{m_1 n}\, (\lambda+m_1 n+m_2 k)_l}{k! \quad l!}\, t^{\alpha_2(n+d_1 k+d_2 l)}, \tag{2·4}$$

जहाँ

$$d_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad \text{तथा} \quad d_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

प्रमेयिका (2·5) के सम्प्रयोग से

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/m]} B(k, n-mk), \tag{2·5}$$

समीकरण (2·4) के दाहिने पक्ष को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha_2 n}(x, y) t^{\alpha_2 n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/d_1]} \sum_{l=0}^{[n/d_2]} \frac{[(a_r)]_{n-r_1\, k-d_2 l}}{[(b_2)]_{n-r_1\, k-d_2 l}}$$

$$\frac{[(a_p^*)]_{n-d_1\, k-d_2 l}\, [(\alpha_u^*)]_k\, \mu^{n-d_1\, k-d_2 l}\, \nu^k\, \nu_1^l\, x^{v_1'(n-d_1\, k-d_2 l)+c_1 l}\, y^{c_2'k+c_2)}}{[(b_q^*)]_{n-d_1\, k-d_2 l}\, [(\beta_v^*)]_k\, (n-d_1\, k-d_2 l)! \quad i!}$$

$$\frac{(-1)^{m_1(n-d_1\, k-d_2 l}\, (\lambda)_{m_1 n+(m_2-m_1 d)k-m_1 d_2-1)l}}{k! \quad (\lambda)_{m_1 n+(m_2-m_1 d_1)\, k-m_1 d_2 l}} \quad t^{\alpha_2 n} \tag{2·6}$$

जहाँ $r_1=(d_1-1)$ धन पूर्णांक है।

दोनों पक्षों से $t^{\alpha_2 n}$ के गुणांक की तुलना करने पर हमें फल (2·2) की प्राप्ति होती है।

3. बहुपदी सेट $A_{\alpha_2 n}(x, y)$ के हाइपरज्यामितीय रूप

$(\lambda)_{m_1 n+D_1 k-D_2 l}$ में प्राचलों $D_1=m_2-m_1 d_1$ तथा $D_2=m_1 d_2-1$ के विशिष्टीकरण से (2·1) के दाहिने पक्ष को अनेक हाइपरज्यामितीय रूप प्रदान किये जाते हैं। इनमें से कुछ को हम उपप्रमेयों के रूप में आगे दे रहे हैं।

उपप्रमेय 1.

$D_1>0$ तथा $D=0$ के लिये (2·2) से

$$A_{\alpha_2 n}(x, y)=R_1 \sum_{l=0}^{[n/d_2]} \frac{\triangle_l[d_2; 1-(b_s)-n] \triangle_l[d_2; 1-(b_q^*)-n] \triangle_l[d_2; -n]}{\triangle_l[d_2; 1-(a_r)-n] \triangle_l[d_2; 1-(a_p^*)-n]}$$

$$\frac{(1-\lambda-m_1 n)\ \mu^{-d_2 l}\ \nu_1^l\ x^{-c_1' d_2 l+c_1 l+c_1'} y^{c_2 l}}{(-d_2)^{d_2 l(p-q+r-s-1)}\ l!} \sum_{k=0}^{[n/d_1]} \frac{[a_u^*)]_k}{[(\beta_v^*)]_k}$$

$$\frac{\triangle_k[d_1; -n+d_2 l] \triangle_k[r_1; 1-(b_s)-n+d_2 l] \triangle_k[d_1; 1-(b_q^*)-n+d_2 l]}{\triangle_k[r_1; 1-(a_r)-n+d_2 l] \triangle_k[d_1; 1-(a_p^*)-n+d_2 l].}$$

$$\frac{\triangle_k[D_1; \lambda+m_1 n]\ (-1)^{-m_1 d_1 k}\ \mu^{-d_1 k}\ \nu^k\ x^{-c'_1 d_1 k}\ y^{c_2' k}\ (-r_1)^{-r_1 k(r-s)}}{\triangle_k[D_1; \lambda+m_1 n-l)\ (-d_1)^{d_1 k(p-q-1)}\ k!},$$

अथवा

$$A_{\alpha_2 n}(x, y)=R_1 \sum_{l=0}^{[n/d_2]} \frac{\triangle_l[d_2; 1-(b_s)-n] \triangle_l[d_2; 1-(b_q^*)-n] \triangle_l[d_2; -n]}{\triangle_l[d_2; 1-(a_r)-n] \triangle_l[d_2; 1-(a_p^*)-n]}$$

$$\times \frac{(1-\lambda-m_1 n)_l\ \mu^{-d_2 l}\ \nu_1^l\ x^{-c_1' d_2 l+c_1 l}\ y^{c_2 l}}{(-d_2)^{d_2 l(p-q+r-s-1)}\ l!}$$

$$\times_{u+d_1+r_1 s+D_1+d_1 q}F_{v+r_1 r+d_1 p+D_1}\left[\begin{matrix}(a_u^*), \triangle(d_1; -n+d_2 l), \\ \triangle(r_1; 1-(b_s)-n+d_2 l), \\ \triangle(D_1; \lambda+m_1 n), \\ \triangle(d_1; 1-(b_q^*)-n+d_2 l); \\ (\beta_v^*), \triangle(r_1; 1-(a_r)-n+d_2 l), \\ \triangle(d_1; 1-(a_p^*)-n+d_2 l), \\ \triangle(D_1; \lambda+m_1\ n-l); \\ \frac{(-1)^{-m_1 d_1}\ \mu^{-d_1}\ \nu\ x^{-c'_1 d_1}\ y^{c'_2}\ (-r_1)^{-r_2(r-s)}}{(-d_1)^{d_1(p-q-1)}}\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$R_1=\frac{[(a_r)]_n[(a_p^*)]_n\ (-1)^{m_1 n}\ \mu^n\ x^{c'_1 n}}{[(b_s)]_n[(b_q^*)]_n\ n!}. \tag{3·2}$$

उपप्रमेय 2. $D_1>1$ तथा $D_2>0$ के लिये (2·2) से

$$A_{\alpha_2 n}(x,y)=R_1\sum_{l=0}^{[n/d_2]}\frac{\triangle_l[d_2;1-(b_s)-n]\,\triangle_l[d_2;1-(b_q^*)-n]}{\triangle_l[d_2;1-(a_r)-n]\,\triangle_l[d_2;1-(a_p^*)-n]}$$

$$\frac{\triangle_l[d_2;-n]\,\triangle_l[m_1d_2;1-\lambda-m_1n]\,(-1)^{-m_1d_2l}\,\mu^{-d_2l}\,\nu_1^l\,x^{-c'_1d_2l+c_1l}y^{c_2l}(-D_2)^{-D_2l}}{\triangle_l[D_2;1-\lambda-m_1n]\,(-d_2)^{d_2l(p-q+r-s-1)}\quad l!\quad(-m_1d_2)^{-m_1d_2l}}$$

$$\times\,{}_{u+r_1s+d_1q+d_1+D_1}F_{v+r_1r+d_1p+D_1}\left[\begin{matrix}(d_u^*),\ \triangle(r_1;1-(b_s)-n+d_2l),\\ \triangle(d_1;1-(b_q^*)-n+d_2l)\\ \triangle(d_1;-n+d_2l)\ \triangle(D_1;\lambda+m_1n-D_2l);\\ (\beta_v^*),\ \triangle(r_1;1-(a_r)-n+d_2l),\\ \triangle(d_1;1-(a_p^*)-n+d_2l),\\ \triangle(D_1;\lambda+m_1n-m_1d_2l);\\ \dfrac{(-1)^{-m_1d_1}\,\mu^{-d_1}\,\nu\,x^{-c''_1d_1}\,y^{c'_2}\,(-r_1)^{-r_1(r-s)}}{(-d_1)^{d_1(p-q-1)}}\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

उपप्रमेय 3. $D_1>0$ तथा $D_2<0$.

माना $D_2=-D_2^*$(D_2^* धन पूर्णांक होने पर) (2·1) से

$$A_{\alpha_2 n}(x,y)=R_1\sum_{l=0}^{[n/d_2]}\frac{\triangle_l[d_2;1-(b_s)[-n]\,\triangle_l[d_2;1-(b^{q*})-n]\,\triangle_l[d_2;-n]}{\triangle_l[d_2;1-(a_r)-n]\,\triangle_l[d_2;1-(a_p^*)-n]}$$

$$\frac{\triangle_l[D_2^*;\lambda+m_1n]\,\triangle_l[m_1d_2;1-\lambda-m_1n]\,\mu^{-d_2l}\,\nu_1^l\,x^{-c_1'd_2l\cdot c_1l}}{(-m_1d_2)^{-m_1d_2l}\,(-d_2)^{dl(p-q+r-s-1)}\quad l!}$$

$$\times\,y^{c_2l}(-1)^{-m_1d_2l}\,(D_2^*)^{D_2^*l}$$

$$\times\,{}_{u+d_1+r_1s+d_1q+D_1}F_{v+_1r+d_1p+D_1}\left[\begin{matrix}(a_u^*),\ \triangle(d_1;-n+d_2l),\\ \triangle(r_1:1-(b_s)-n+d_2l),\\ \triangle(d_1;1-(b_q^*)-n+d_2l),\\ \triangle(D_1;\lambda+m_1n+D^*_2l);\\ (\beta_v^*),\ \triangle(r_1;1-(a_r)-n+d_2l),\\ \triangle(d_1;1-(a_p^*)-n+d_2l),\\ \triangle(D_1;\lambda+m_1n-m_1d_2l);\\ \dfrac{(-1)^{-m_1d_1}\,\mu^{-d_1\nu}\,x^{-c'_1d_1}\,y^{c'_2}(-r_1)^{-r_1(r-s)}}{(-d_1)^{d_1(p-q-1)}}\end{matrix}\right] \tag{3·4}$$

यदि $m_1=0$, $D_1=m_2$ तथा $D_2^*=1$, तो थोड़े से सरलीकरण के पश्चात्

$$A_{a_2n}(x, y)=R_1 \sum_{l=0}^{[n/d_2]} \frac{\triangle_l[d_2; 1-(b_s)-n]\ \triangle_l[d_2; 1-(b_q^*)n]\ \triangle_l(d_2; -n]}{\triangle_l[d_2; 1-(a_r)-n]\ \triangle_l[d_2; 1-(a_p^*)-n]}$$

$$\frac{(\lambda)_l\ \mu^{-d_2l}\ \nu_1^l\ x^{-c_1'd_2l+c_1l}\ y^{c_2l}}{(-d_2)^{d_2l(p-q+r-s-1)}\ l!}$$

$$ {}_{u+d_1+r_1s+d_1q+m_2}F_{v+r_1r+d_1p+m_2}\left[\begin{matrix}(a_u^*), \triangle(d_1; -n+d_2l), \\ \triangle(r_1; 1-(b_s)-n+d_2l), \\ \triangle(d_1; 1-(b_q^*)-n+d_2l), \\ \triangle(m_2; \lambda+l); \\ (\beta_v^*), \triangle(r_1; 1-(a_r)-n+d_2l), \\ \triangle(d_1; 1-(a_p^*)-n+d_2l), \triangle(m_2; \lambda); \\ \dfrac{\mu^{-d_1\nu}\ x^{-c'_1d_1}\ y^{c'_2}\ (-r_1)^{-r_1(r-s)}}{(-d_1)^{d_1(p-q-1)}}\end{matrix}\right] \tag{3·5}$$

उपप्रमेय 4.

$D_1=0$ तथा $D_2<0$ (माना $D_2=-D_2^*$, D_2^* घन पूर्णांक है) के लिये समीकरण (2·2) से निम्नलिखित हाइपरज्यामितीय रूप प्राप्त होता है

$$A_{a_2n}(x, y)=R_1 \sum_{l=0}^{[n/d_2]} \frac{\triangle_l[d_2; 1-(b_s)-n]\ \triangle_l[d_2; 1-(b_q^*)-n]\ \triangle_l[d_2; -n]}{\triangle_l[d_2; 1-(a_r)-n]\ \triangle_l[d_2; 1-(a_p^*)-n]}$$

$$\times \frac{\triangle_l[D_2^*; \lambda+m_1n]\ \triangle_l[m_1d_2; 1-\lambda-m_1n]\ (-1)^{-m_1d_2l}\ \mu^{-d_2l}\ \nu_1^l\ x^{-c'_1d_2l+c_1l}}{(-md_2)^{-m_1d_2l}\ (-d_2)^{dl(p-qr-s-1)}\ l!}$$

$$\times y^{c_2l}(D_2^*)^{D_2^*l}$$

$$\times {}_{u+r_1s+d_1q+d_1}F_{v+r_1r+d_1p}\left[\begin{matrix}(a_u^*), \triangle(r_1; 1-(b_s)-n+d_2l), \\ \triangle(d_1; 1-(b_q^*)-n+d_2l), \triangle(d_1; -n+d_2l); \\ (\beta_v^*), \triangle(r_1; 1-(a_r)-n+d_2l), \\ \triangle(d_1; 1-(a_p^*)-n+d_2l); \\ \dfrac{(-1)^{-m_1d_1}\ \mu^{-d_1}\ \nu\ x^{-c'_1d_1}\ y^{c'_2}\ (-r_1)^{-r_1(r-s)}}{(-d_1)^{d_1(p-q-1)}}\end{matrix}\right] \tag{3·6}$$

उपप्रमेय 5.

$m_1=0$ होने पर समीकरण (2.2) निम्नलिखित हाइपरज्यामितीय रूप में समानीत हो जाता है

$$A_{a_2^n}(x, y)=R_1^* \sum_{k=0}^{[n/d_1]} \frac{[(\alpha_u^*)]_k \, \triangle_k[r_1; 1-(b_s)-n] \, \triangle_k[d_1; 1-(b_q^*)-n]}{[(\beta_v^*)]_k \, \triangle_k[r_1; 1-(a_r)-n]_k \, d_1; 1-(a_p^*)-n}$$

$$\times \frac{\triangle_k[d_1; -n] \, (-r)^{-r_1k(r-s)} \, \mu^{-d_1k} \, \nu^k \, x^{-c'_1 d_1 k} \, y^{c'_2 k}}{(-d_1)^{d_1k(p-q-1)} \, k!}$$

$$\times {}_{d_2(q+s+1)+1}F_{d_2(r+p)} \left[\begin{matrix} \triangle(d_2; 1-(b_s)-n+r_1k), \triangle(d_2; -n+d_1k), \\ \triangle(d_2; 1-(b_q^*)-n+d_1k), (\lambda+m_2k), \\ \triangle(d_2; 1-(a_r)-n+r_1k); \\ \triangle(d_2; 1-(a_p^*)-n+d_1k); \\ \dfrac{\mu^{-d_2} x^{-c_1'd_2+c_1} y^{c_2} \nu_1}{(-d_2)^{d_2(p-q+r-s-1)}} \end{matrix} \right] \quad (3\cdot7)$$

जहाँ

$$R_1^*=\frac{[(a_r)]_n \, [(a_p^*)_n \, \mu^n \, x^{c_1'n}}{[(b_s)]_n \, [(b_q^*)]_n \; n!}. \quad (3\cdot8)$$

विशिष्ट दशायें

$\lambda=m_2=\nu_1=r=s={c_1}'-1=a_2-1=0$ तथा $c_2'=-a_3$, मानों का प्रयोग करने पर निम्नलिखित रोचक फल प्राप्त होते हैं

(I) $p=q=0=u$; $\beta_1^*=1=v=y=\mu$; $a_3=2$; $\nu=\frac{1}{4}$ के लिये तथा x के लिये $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ होने पर

$$A^{0;\,1;\,\frac{1}{4};\,1;\,-2;\,1;\,2;\,-;\,-;\,-}_{n;\,0;\,-;\,-;\,0;\,0;\,-;\,-;\,-;\,1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, 1\right)=\frac{x^n}{n! \, (x^2-1)^{n/2}}$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n/2, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n; \\ 1; \end{matrix} \; \frac{x^2-1}{x^2}\right] \quad (3\cdot9)$$

रूपान्तर

$$F\left(b, a+\tfrac{1}{2}; c; Z\right)=(1-Z)^{-a} F\left(2a, 2c-2a-1; c; \frac{\sqrt{(1-Z-1)}}{2\sqrt{(1-Z)}}\right) \quad (3\cdot10)$$

का प्रयोग करने पर (3·9) का दक्षिण पक्ष निम्नवत् हो जाता है

$$\frac{(x^2-1)^{-n/2}}{n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, n+1; & \frac{1-x}{2}\\ 1; & \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(x^2-1)^{-n/2}\,p_n(x)}{n!}, \tag{3·11}$$

जहाँ $p_n(x)$ लेगेंड्र बहुपदी हैं।

(II). (i) $p=0=u;\ q=1=v;\ \beta_1{}^*=\lambda+\frac{1}{2}=b_1{}^*;\ y=1=a_3;\ \mu=\frac{1}{2}=\nu$ के लिए तथा x के लिए $\frac{x+1}{x-1}$ होने पर

$$A^{0;\,\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,1;\,-1;\,1;\,1;\,-;\,-}_{n;\,0;\,-;\,-;\,0;\,0;\,-;\,-;-;\,\lambda+\frac{1}{2};\,\lambda+\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{x+1}, 1\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x-1}\right)^n}{n!\,(\lambda+\frac{1}{2})_n}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, \frac{1}{2}-\lambda-n; & \frac{x-1}{x+1}\\ \lambda+\frac{1}{2}; & \end{matrix}\right] \tag{3·12}$$

रूपान्तर

$$F(a, b; c; Z)=(1-Z)^{-a}\,F\left(a, c-b; c; \frac{Z}{Z-1}\right), \tag{3·13}$$

की सहायता से (3·12) का दक्षिण पक्ष निम्नवत् हो जाता है

$$\frac{(x-1)^{-n}\,(2\lambda)_n}{n!\,(2\lambda)_n\,(\lambda+\frac{1}{2})_n}\,F\left[\begin{matrix}-n, 2\lambda+n; & \frac{1-x}{2}\\ \lambda+\frac{1}{2}; & \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(x+1)^{-n}}{(\lambda+\frac{1}{2})_n\,(2\lambda)_n}\,C_n^{(\lambda)}(x), \tag{3·14}$$

जहाँ $C_n^{(\lambda)}(x)$ गेगेनबॉर बहुपदी हैं।

(ii) $p=0=q=u;\ v=1=y=\mu;\ \beta_1{}^*=\lambda+\frac{1}{2};\ a_3=2;\ \nu=\frac{1}{4}$ तथा $x=\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ के होने पर

$$A^{0;\,1;\,\frac{1}{4};\,1;\,-2;\,1;\,2;\,-;\,-;\,-}_{n;\,0;\,-;\,-;\,0;\,0;\,-;\,-;\,-;\,\lambda+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}, 1\right)$$

$$=\frac{x^n}{(\sqrt{x^2-1})^n\,n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n/2, -\frac{n-1}{2}; & \frac{x^2-1}{2}\\ \lambda+\frac{1}{2}; & \end{matrix}\right].$$

(3·10) में दिये गये रूपान्तर का प्रयोग करने पर, थोड़े से सरलीकरण के पश्चात्

$$\frac{(x^2-1)^{-n/2}}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ 2\lambda+n; & \frac{1-x}{2}\\ \lambda+\frac{1}{2}; & \end{matrix}\right]=\frac{(x^2-1)^{-n/2}}{(2\lambda)_n}\ C_n^{(\lambda)}(x) \qquad (3\cdot15)$$

जहाँ $C_n^{(\lambda)}(x)$ गेगेनबॉर बहुपदी हैं।

(III) $u=\alpha_3=1=y=\mu=\nu;\ p=0=q=\nu;\ \alpha_1{}^*=x$, के लिए

$$A^{0:\ 1;\ 1:\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ x}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ -;\ -}(x,\ 1)=\frac{x^n}{n!}\ {}_2F_0\left[\begin{matrix}-n,\ x; & -\frac{1}{x}\\ -; & \end{matrix}\right]=\Phi_n(x), \qquad (3\cdot16)$$

जहाँ $\Phi_n(x)$ सिलवेस्टर बहुपदी हैं।

(IV) $p=0=q$ तथा $y=1$ के लिए

$$A^{0;\ \mu;\ \nu:\ 1;\ -\alpha_3;\ 1;\ \alpha_3;\ -;\ -;\ (\alpha_u{}^*)}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0:\ 0;\ -;\ -;\ -;\ (\beta_v{}^*)}(x,\ 1)=\frac{(\mu x)^n}{n\,!}\ F\left[\begin{matrix}\triangle(\alpha_3;\ -n),\ (\alpha_u{}^*);\\ (\beta_v);\\ \frac{\nu(-\alpha_3)^{\alpha_3}}{(\mu x)^{\alpha_3}}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{A^{c;\ \mu;\ m;\ (\alpha_u{}^*)}_{n;\ \nu;\ -;\ (\beta_v{}^*)}(x)}{(C)_n}, \qquad (3\cdot17)$$

जहाँ $A_n(x)$ पंडा[5] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत बहुपदी हैं।

(V) $p=0=u;\ q=\nu=1=y=\alpha_3;\ b_1{}^*=1+\alpha=\beta_{1*};\ \mu=\frac{1}{2}=\nu$ तथा $x=\frac{x-1}{x+1}$ के लिए

$$A^{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}:\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ -}_{n;\ (;\ -;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ 1+\alpha;\ 1+\alpha}\left(\frac{x-1}{x+1},\ 1\right)$$

$$=\frac{(\frac{1}{2})^n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n!\ (1+\alpha)_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -\alpha-n: & -\frac{x+1}{x-1}\\ 1+\alpha; & \end{matrix}\right].$$

(3·13) में दिए गए रूपान्तर की सहायता से दक्षिण पक्ष निम्नवत् होगा

$$\frac{(x+1)^{-n}\,(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha)_n\ n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ 2\alpha+n-1; & \frac{1-x}{2}\\ 1+\alpha; & \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(x+1)^{-n}\,p_n^{(\alpha,\ \alpha)}(x)}{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha)_n}, \qquad (3\cdot18)$$

जहाँ $p_u^{(\alpha, \alpha)}(x)$ पशगोलीय बहुपदी हैं ।

(VI) $p=0=q;\ u=v=\mu=1+\alpha_3=x=y;\ \alpha_1^*=1-Z;\ \beta_1^*=2$ तथा $d_v=-2$ के लिए

$$A_{n;\ 0;\ -;\ -0;\ 0;\ -;\ -;\ -;\ 2}^{0;\ 1;\ -2;\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ 1-Z}(1, 1)=\frac{1}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, 1-Z; \\ 2;\end{matrix}\ 2\right]$$

$$=\frac{1}{n!\ 2Z}\,g_{n+1}(Z), \qquad (3{\cdot}19)$$

जहाँ $g_{n+1}(Z)$ मिटाज-लेफलर बहुपदी हैं ।

(VII) प्रतिबन्धों के दो समुच्चयों के लिए हमें प्रथम प्रकार का शेबीशेफ बहुपद प्राप्त होता है ।

(a) $p=0=u;\ q=v=1=y=\alpha_3;\ b_1^*=\beta_1^*=\frac{1}{2}=\mu=v;$ तथा $x=\frac{x-1}{x+1}$ के लिए

$$A_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ -1;\ 1;\ 1,\ -;\ 1;\ -;\ -}\left(\frac{x-1}{x+1}, 1\right)=Z^{1/n}\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n!\ (\frac{1}{2})_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, \frac{1}{2}-n; \\ \frac{1}{2};\end{matrix}\ \frac{x+1}{x-1}\right]$$

प्राप्त होता है । (3·13) में दिये हुए रूपान्तर के प्रयोग करने से दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है जो निम्नवत् है

$$\frac{(x+1)^{-n}}{n!\ (\frac{1}{2})_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n; \\ \frac{1}{2},\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right]=\frac{(x+1)^{-n}\,T_n(x)}{n!\ (\frac{1}{2})_n} \qquad (3{\cdot}20)$$

(b) जब हम $p=0=u;\ q=v=1=y=\alpha_3;\ b_1^*=\beta_1^*=\frac{1}{2}=\mu=v$ तथा $x-\frac{x+1}{x-1}$ लेते हैं तथा रूपान्तर (3·13) का प्रयोग करते है तो

$$A_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}}^{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ -}\left(\frac{x+1}{x-1}, 1\right)=\frac{(x-1)^{-n}}{n!\ (\frac{1}{2})_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n; \\ \frac{1}{2};\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right]$$

$$=\frac{(x-1)^{-n}\,T_n(x)}{(\frac{1}{2})_n\ n!}. \qquad (3{\cdot}21)$$

(VIII) द्वितीय प्रकार का शेबीशेफ बहुपदी $U_n(x)$ निम्नलिखित दो प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होता है

(a) $p=0=u;\ q=v=1=y=\alpha_3;\ b^*_1=3/2=\beta_1^*;\ \nu=\mu=\frac{1}{2}$ तथा $x=\dfrac{x-1}{x+1}$ के लिए

$$A^{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;-;\ -;\ -;\ -}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ 3/2;\ 3/2;}\left(\frac{x-1}{x+1},\ 1\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\,\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n!\ (3/2)_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -\frac{1}{2}-n; \\ 3/2;\end{matrix}\ \frac{x+1}{x-1}\right].$$

(3·13) में दिये हुये रूपान्तर का उपयोग करने पर दक्षिण पक्ष

$$\frac{(x+1)^{-n}}{n!\ (3/2)_n}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n+2; \\ 3/2:\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right]=\frac{(x+1)^n}{(n+1)!\ (3/2)_n}\ U_n(x). \qquad (3·22)$$

(b) $p=0=u;\ q=v=1=y=\alpha_3;\ b_1^*=3/2=\beta_1^*;\ \nu=\frac{1}{2}=\mu;\ x=\dfrac{x+1}{x-1}$ रखने पर तथा रूपान्तर (3·13) को व्यवहृत करने पर

$$A^{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ -}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ 3/2;\ 3/2}\left(\frac{x+1}{x-1},\ 1\right)$$

$$=\frac{(x-1)^{-n}}{(3/2)_n\ n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ n+2; \\ 3/2;\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right]=\frac{(x-1)^{-n}}{(n+1)!\ (3/2)_n}\ U_n(x). \qquad (3·23)$$

(IX) प्राचलों $p=q=1=u=v=\mu=\alpha_3=y;\ a_1^*=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x,\ a_1^*=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x:\beta_1^*=c=b_1^*;$ तथा $\nu=-1$ प्राचलों को चुनने तथा p के लिए y लिखने पर

$$A^{0;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ c;\ c}\ (y,\ 1)$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n)_n\ (-1)^n}{(c)_n\ n!}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x,\ 1-c-n; \\ c,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-n;\end{matrix}\ y\right]=\frac{\psi_n(c,\ x,\ y)}{n!}, \qquad (3·24)$$

जहाँ $\psi_n(c,\ x,\ y)$ सार्वीकृत बेटमैन बहुपदी[6] हैं।

(X) $\beta_1^*=\mu=u=v=1=\alpha_3=x;\ p=0=1z,\ \alpha_1^*=1+x;\ \nu=-1$ तथा $y=\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$ के होने पर

$$A^{0;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ 1;\ -;\ -;\ 1+x}_{n;\ 0;\ -;\ -;\ 0;\ 0;\ -;\ -;\ -;\ 1}\left(1,\ \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\right)$$

$$=\frac{e^{-n\lambda}}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -x; \\ 1;\end{matrix}\ 1-e^{\lambda}\right]=\frac{\Phi_n(x;\ \lambda)}{n'}, \qquad (3·25)$$

जहाँ $\Phi_n(x; \lambda)$ गॉटलीब बहुपदी हैं।

इसी प्रकार शेष अन्य दशाओं के लिए हाइपरज्यामितीय रूप लिखे जा सकते हैं जिससे प्राचलों के विशिष्टीकरण के फलस्वरूप कतिपय ज्ञात बहुपदी तंत्र प्राप्त हो सकते हैं।

निर्देश

1. बर्चनाल, जे० एल० तथा चांडी, टी० डब्लू०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, आक्सफोर्ड सीरीज, 1941, **12**, 112-128.
2. एर्डेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू०, ओबरहेटिंगर, एफ० तथा ट्राइकोमी, एफ० जी०, Higher Transcendental Functions, भाग I, न्यूयार्क, 1953.
3. गूल्ड, एच० डब्लू० तथा हॉपर, ए० टी०. **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1962, **29**, 51-63
4. लाहिरी, एम०, शोधप्रबन्ध, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1966.
5. पंडा, आर०, शोधप्रबन्ध, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1967.
6. रेनविले, अर्ल डी०, Special Functions. मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 161-165

यूलरी बहुपदी $\{\phi_n(x, \xi)\}$ के सम्बन्ध में

एस० डी० सिंह तथा एस० एन० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जून 9, 1979]

सारांश

यूलरी बहुपदी $\{\phi_n(x, \xi)\}$ से कतिपय रोचक गुणों का निगमन किया गया है, यथा पूरक कोणांक प्रमेय तथा उत्तरोत्तर कोटियों के बहुपदियों के मध्य सम्बन्ध ।

Abstract

On Eulerian polynomials $\{\phi_n(x, \xi)\}$. *By* S.D. Singh and S.N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

Some interesting properties viz. complimentary argument, theorem and relation between polynomials of successive orders have been deduced from Eulerian polynomials $\{\phi_n(x, \xi)\}$.

1. प्रस्तावना

कार्लिट्ज[1] ने यूलरी बहुपदियों $\{\phi_n(x, \xi)\}$ को जनक सम्बन्ध

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x, \xi) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-\xi)}{(1-\xi e^t)} e^{xt}, \tag{1.1}$$

की सहायता से परिभाषित किया है जहाँ $\xi \neq 1$ अन्यथा यादृच्छिक है ।

इस बहुपदी समुच्चय का अध्ययन कार्लिट्ज[2,3] के कई शोधपत्रों का आधार है ।

प्रस्तुत प्रपत्र में उपर्युक्त बहुपदी समुच्चय की और आगे विवेचना की गई है और कुछ रोचक गुण प्राप्त किये गये हैं, यथा पूरक कोणांक प्रमेय तथा उत्तरोत्तर कोटि वाले बहुपदियों के मध्य सम्बन्ध ।

2. (1.1) में x के स्थान पर $(x+y)$ लिखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n((x+y)\xi), \frac{t^n}{n!} = \frac{1-\xi}{1-\xi e^t} e^{(x+y)t}, \tag{2.1}$$

जो (1.1) के परिपेक्ष्य में (2.2) प्रदान करता है ।

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n((x+y), \xi) \frac{t^n}{n!} = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y, \xi) \frac{t^n}{n!}$$

$$\phi_n((x+y), \xi) = \phi_n(y, \xi) + x \binom{n}{1} \phi_{n-1}(y, \xi) + x^2 \binom{n}{2} \phi_{n-2}(y, \xi) + \ldots + x^n \binom{n}{n} \phi_0(y, \xi) \tag{2.2}$$

(2.2) में $y=0$ रखने पर

$$\phi_n(x, \xi) = \phi_n(0, \xi) + x \binom{n}{1} \phi_{n-1}(0, \xi) + \ldots + x^n \binom{n}{n} \phi_0(0, \xi)$$

जिससे यह प्रदर्शित होता है कि जब तक $\phi_0(0, \xi)=0$ न हो $\phi_n(0, \xi)$ n कोटि का है ।

नारलुंड आपरेटर

इसे सम्बन्ध

$$\underset{w}{\triangle} = \frac{u(x+w)-u(x)}{w}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है । इस संकेत का लाभ यह है कि

$$\lim_{w \to 0} \underset{w}{\triangle} u(x) = Du(x), \; D \equiv d/dx.$$

आपरेटर $\underset{w}{\triangle}$

इस आपरेटर की परिभाषा

$$\underset{w}{\triangle} u(x) = \frac{1}{2} [u(x)+u(x+w)]$$

द्वारा की जाती है। $\triangle$ से (1.1) को आपरेट (संक्रिया) करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \triangle \phi_n(x, \xi) = (e^t-1) \frac{(1-\xi)}{(1-\xi e^t)} e^{xt} \tag{2.4}$$

पुनः (1.1) में $\triangle$ की संक्रिया करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \triangle\phi_n (x, \xi)= \frac{e^t+1}{2} \frac{(1-\xi)}{(1-\xi e^t)} e^{xt} \tag{2.5}$$

पूरक कोणांक प्रमेय

x तथा $(p-x)$ कोणांक पूरक कहलाते हैं।

अब हम सिद्ध करेंगे कि

$$\phi_n^p \left((p-x), \frac{\xi}{1}\right)=(-1)^n\phi_n^p(x, \xi) \tag{3.1}$$

उपपत्ति

(3.1) से ज्ञात होता है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^p (x, \xi) \frac{t^n}{n!}=\frac{(1-\xi)^p}{(1-\xi e^t)^p} e^{xt} \tag{3.2}$$

अब निम्नलिखित पर विचार करें

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^p \left(p-x, \frac{1}{\xi}\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^p}{\left(1-\frac{1}{\xi} e^t\right)^p} e^{(p-x)t}$$

$$=\frac{(1-\xi)^p e^{-xt}}{(1-\xi e^{-t})^p}$$

अतः

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^p \left(p-x, \frac{1}{\xi}\right) \frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^p (x, \xi) \frac{(-t)^n}{n!}$$

इससे उपपत्ति पूरी होती है।

यदि (3.1) में $x=0$ तथा $n=2$ रखें तो

$$\left(p, \frac{1}{\xi}\right)=\phi_{2\mu}^p (0, \xi) \tag{3.3}$$

इस प्रकार

$$\left\{\phi^{p}_{2\mu}\left(x, \frac{1}{\xi}\right) - \phi^{p}_{2\mu}(0, \xi)\right\}$$

का शून्य $x=p$ पर आता है।

पुनश्च,

$$\phi^{p}_{2\mu+1}\left(p/2, \frac{1}{\xi}\right) + \phi^{p}_{2\mu+1}(p/2, \xi) = 0 \tag{3.4}$$

4. उत्तरोत्तर कोटि वाले बहुपदियों के मध्य सम्बन्ध

(3.2) के दोनों पक्षों को t के प्रति अवकलित करने तथा t से गुणा करने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{p}_{n}(x, \xi) \frac{t^n}{(n-1)!} = \frac{xt\, e^{xt}(1-\xi)^p}{(1-\xi e^t)^p} + \frac{pt\xi(1-\xi)^p}{(1-\xi e^t)^{p+1}} e^{(x+1)t}$$

(3.2) के कारण उपर्युक्त व्यंजक को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\phi^{p}_{n}(x, \xi) \frac{t^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{p}_{n}(x, \xi) \frac{t^{n+1}}{n!} + \frac{\xi p}{(1+\xi)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{p+1}_{n}(x+1, \xi) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$n\phi^{p}_{n}(x, \xi) = nx\, \phi^{p}_{n-1}(x, \xi) + \frac{p\xi}{(1-\xi)} n\, \phi^{p+1}_{n-1}(x+1, \xi). \tag{4.1}$$

$$\phi^{p}_{n}(x, \xi) = x\, \phi^{p}_{n-1}(x, \xi) + \frac{\xi p}{(1-\xi)} \phi^{p+1}_{n-1}(x, \xi) + (n-1)\, \phi^{p}_{n-2}(x, \xi)$$

अन्तिम रूप से

$$\frac{\xi}{(1-\xi)} \phi^{p+1}_{n-1}(x, \xi) = \frac{1}{p} \phi^{p}_{n}(x, \xi) - \frac{x}{p} \phi^{p}_{n-1}(x, \xi) - \frac{(n-1)\xi}{(1-\xi)} \phi_{n-2}(x, \xi), \tag{4.2}$$

जो p तथा $(p+1)$ कोटि वाले बहुपदियों के मध्य वांछित सम्बन्ध है। (4.2) में $x=0$ रखने पर

$$\frac{\xi}{1-\xi} \phi^{p+1}_{n-1}(0, \xi) = \frac{1}{p} \phi^{p}_{n}(0, \xi) - \frac{(n-1)\xi}{(1-\xi)} \phi^{p}_{n-2}(0, \xi)$$

पुनः (4.1) से

$$\frac{\xi p}{(1-\xi)} \phi_{n-1}^{p+1} (x+1, \xi) = \phi_n^p (x, \xi) - x\phi_{n-1}^p (x, \xi) \tag{4.4}$$

विशेष रूप से $x=0$ के लिये

$$\frac{\xi p}{(1-\xi)} \phi_{n-1}^{p+1} (1,\xi) = p\ {}_n^p (0, \xi) \tag{4.5}$$

p के स्थान पर $(p+1)$ रखने पर

$$\frac{\xi}{(1-\xi)} \phi_{n-1}^{p+n+1} (1, \xi) = \frac{1}{(p+n)} \phi_n^{p+n} (0, \xi) \tag{4.6}$$

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल०, *Mh, Math.*, 1962, **66**, 1-8.

2. वही, *Math. J.*, 1972, **39**, 267-280.

3. वही, *Math. Magazine*, 1959, **30**, 247-260.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 167-175

अनन्त सरंध्र पट्टिका में से स्थिर प्रचूषण के साथ घातांकी प्रवाह पर युग्म प्रतिबलों के प्रभाव

के० एस० पाण्डेय तथा एन० चतुर्वेदी

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—अक्टूबर 4, 1980]

सारांश

किसी अनन्त सरंध्र पट्टिका में से स्थिर प्रचूषण के साथ दो-विमीय ध्रुवीय तरल प्रवाह की विवेचना की गई है। दो विभिन्न दशाओं के लिए वेग तथा चर्म-घर्षण हेतु व्यंजक प्राप्त किये गये हैं। यह निष्कर्ष निकलता है कि जब गतिक घूर्णी श्यानता बढ़ती है तो वेग तथा चर्म-घर्षण घटते हैं।

Abstract

Effects of couple stresses on exponential flow past an infinite porous plate with constant suction. *By* K.S. Pandey and N. Chaturvedi, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The two dimensional polar fluid flow problem past an infinite porous plate with constant suction has been discussed. Expressions for the velocity and skin-friction have been obtained in dimensionless forms for two different cases : (1) exponentially increasing small perturbation and (2) exponentially decreasing small perturbation. It has been concluded that the velocity and skin-friction decrease when the kinematic rotational viscosity increases.

किसी अनंत सरंध्र पट्टिका में से होकर श्यान असंपीड्य द्रव के प्रवाह का अध्ययन लाइटहिल[1] ने प्रारम्भ किया जिसका अनुमोदन स्टुअर्ट[2] ने किया। मेसीहा[3] ने स्थिर चूषण के अन्तर्गत स्टुअर्ट के अध्ययन को आगे बढ़ाया। पाण्डेय[4] ने द्वि-विमीय प्रवाह का अध्ययन किया है। इन सभी अध्ययनों में नैवियर-स्टोक्स समीकरणों द्वारा द्रव का प्रवाह नियन्त्रित किया गया। हाल ही में ग्रैड[5], ऐरों, बुलीगिन तथा कुवशिन्स्की[6], कोविन[7], डाहलर[8] तथा एरिंजन[9] ने कोणीय वेग पर विचार करते हुए नैवियर-स्टोक्स समीकरणों को

संशोधित किया है। ऐसे द्रव जो ध्रुवीय द्रवों के नाम से ज्ञात हैं उनके लिये परिसीमा-स्तर समीकरण डेएल द्वारा व्यवकलित हुए हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक अनन्त सरंध्र पट्टिका में से होकर स्थिर प्रचूषण के साथ ध्रुवीय द्रव के गुणधर्मों में होने वाले प्रभावों का अध्ययन करना है। वाह्य प्रवाह वेग को $U_0'(1+\epsilon e^{n't'})$ माना गया है जहाँ U_0' भित्ति से काफी दूरी पर माध्य मुख्य धारा वेग है और ϵ इकाई से छोटी मात्रा है। V_0' को अशून्य ऋण स्थिर चूषण वेग माना गया है। विश्लेषण करके यह निष्कर्ष निकाला गया है कि परिसीमा स्तर पर वेग तथा पट्टिका पर चर्म-घर्षण ध्रुवीय द्रव की गतिक घूर्णी श्यानता में बृद्धि के साथ साथ घटते जाते हैं।

गति के समीकरण

हम किसी अनन्त सरंध्र पट्टिका में ध्रुवीय तरलों के द्वि-विमीय प्रवाह पर विचार करेंगे। प्रवाह भित्ति के समान्तर दूरी पर आश्रित नहीं हैं और भित्ति पर समकोण चूषण वेग V_0' इसकी ओर निर्देशित है और स्थिर है। x' अक्ष को भित्ति के साथ और y' अक्ष को भित्ति के समकोण रखा गया है। डैशों से विमीय संख्यायें दर्शाई गई हैं। इन संकल्पनाओं के अन्तर्गत भौतिक चर y' तथा t' के फलन हैं अतः गति के अस्थिर दो विमीय समीकरण निम्नवत् हैं

आघूर्ण

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial x'}+(\nu+\nu_2)\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+2\nu_r\frac{\partial \omega'}{\partial y'} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'}+v'\frac{\partial \omega'}{\partial y'}=\frac{\gamma}{I}\frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2}, \tag{2}$$

सातत्य

$$\frac{\partial y'}{\partial y'}=0 \tag{3}$$

यहाँ पर u' तथा v' क्रमशः x' तथा y' दिशाओं में वेग घटक हैं, ν गतिक श्यानता है ν_r गतिक घूर्णी श्यानता है, ω' कणों का माध्य कोणीय वेग है, I विमा का अदिश अचर है जो इकाई संहति की इनर्शिया के घूर्ण के तुल्य है तथा

$$\gamma=\frac{C_a+C_d}{I},$$

जहाँ C_a तथा C_d युग्म प्रतिबल श्यानताओं के गुणांक हैं। डेएल[11] ने जो परिसीमा प्रतिबन्ध किये हैं वे हैं :

$$\left.\begin{array}{ll} u'=0,\ \dfrac{\partial \omega'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} & y'=0 \text{ पर} \\ u'\to U'(t'),\ \omega'\to 0 & \text{ज्यों ज्यों } y'\to\infty, \end{array}\right\} \tag{4}$$

जहाँ $U'(t')$ परिसीमा स्तर के बाहर का वेग है। ये परिसीमा प्रतिबन्ध इस कल्पना के अनुसार व्युत्पन्न हैं कि कणों के घूर्णन के समय युग्म प्रतिबल अत्यन्त मुखर है।

संतत चूषण के लिए समीकरण (3) का समाकलन होने पर

$$v'=-v_0' \tag{5}$$

जहाँ v_0' संतत चूषण वेग है जो पट्टिकाओं की ओर निर्देशित है। मुक्त धारा के लिए (1) से हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होगा

$$-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}=\frac{dU'}{dt'}. \tag{6}$$

समीकरण (5) तथा (6) को ध्यान में रखते हुए समीकरण (1) तथा (2) निम्न रूप धारण करते हैं।

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}-v_0'\frac{\partial u'}{\partial y'}=\frac{dU'}{dt'}+(v+v_2)\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+2v_2\frac{\partial \omega'}{\partial y'}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'}-v_0'\frac{\partial \omega'}{\partial y'}=\frac{\gamma}{I}\frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2}, \tag{8}$$

जो परिसीमा प्रतिबन्धों से वाधित है।[4]

अब हम

$$y=\frac{y'v_0'}{v},\quad t=\frac{v_0'^2 t'}{4v},\quad n=\frac{4vn'}{v_0'^2},\quad u=\frac{u'}{U_0'}$$

$$U=\frac{U'}{U_0'},\quad \omega=\frac{\omega' v}{U_0' v_0'},\quad =\frac{Iv}{\gamma},\quad a=\frac{vr}{v} \tag{9}$$

के द्वारा परिमाषित अ-विमीय संख्याओं का परिचय देंगे जहाँ U_0' निर्देश वेग है और n' अदिश प्राचल है जिससे सम्बन्ध $n't'=nt$ की तुष्टि होती है, इसमें n तथा t अ-विमीय हैं। समीकरण (9) की सहायता से समीकरण (7) तथा (8) अ-विमीय रूप

$$\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4}\frac{dU}{dt}+(1+a)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2a\frac{\omega\partial}{\partial y}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial \omega}{\partial t}-\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \tag{11}$$

धारण कर लेते हैं। संगत परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं

$$\left.\begin{array}{l} u=0,\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \ y=0 \text{ पर} \\[2ex] u\to U(t),\ \omega\to 0 \text{ ज्यों ज्यों } y\to\infty \end{array}\right\} \tag{12}$$

यहाँ α तथा β नये प्राचल हैं जिनसे प्रवाह क्षेत्र पर युग्म प्रतिबलों के प्रभावों के अध्ययन में सहायता मिलती है।

हम दो दशाओं में समीकरणों (10) तथा (11) को परिसीमा प्रतिबन्धों (12) सहित हल करेंगे- (1) जब मुक्त वेग घातांकी रीति से बर्द्धमान लघु विक्षोभों का अनुसरण करता है (2) जब मुक्त सरिता वेग घातांकी रीति से ह्रासमान लघु विक्षोभों का अनुसरण करता है।

दशा (1) घातांकी रीति से बर्द्धमान लघु विक्षोभ

माना कि मुक्त धारा में

$$U=1+\epsilon e^{nt} \tag{13}$$

तथा प्लेट के परिवेश में

$$u=f_1(y)+\epsilon e^{nt}f_2(y), \tag{14}$$

तथा

$$\omega=\phi_1(y)+e e^{nt}\phi_2(y). \tag{15}$$

यहाँ पर $f_1(y)$ तथा $\phi_1(y)$ क्रमशः माध्य वेग तथा माध्य कोणीय वेग हैं जब कि $f_2(y)$ तथा $\phi_2(y)$ अस्थिर अंग हैं।

(10) तथा (11) में (13), (14) तथा (15) का मान रखने पर, हार्मोनिक तथा अ-हार्मोनिक गुणांकों को समतुलित करने पर एवं ϵ^2 के गुणांकों की उपेक्षा करने पर

$$(1+\alpha)f_1''+f_1'=-2, \tag{16}$$

$$(1+a)\ f_2''+f_2'-\frac{n}{4}f_1=-\ \frac{n}{4}-2\alpha\phi_1', \tag{17}$$

$$\phi_1''+\beta\phi_1'=0, \tag{18}$$

$$\phi_2''+\beta\phi_2'-\frac{n\beta}{4}\phi_2=0. \tag{19}$$

यहाँ रूढ़ों से y के प्रति अवकलजों का सूचन होता है। सुन्दलगेकर, अरानाके तथा पाप[12] ने इस प्रकार के युग्मित अवकल समीकरणों को हल करने की विधि दी है। तदनुसार, हम पुनः कल्पना करेंगे कि

$$\left.\begin{aligned} f_1=f_{11}+\alpha f_{12}, \quad f_2=f_{21}+\alpha f_{22} \\ \phi_1=\phi_{11}+\alpha\phi_{12}, \ \phi_2=\phi_{21}+\alpha\phi_{22} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ये कल्पनायें तभी सम्भव हैं जब $\alpha<1$ अर्थात् जब $\nu_r<\nu$। इसका सीधा अर्थ यह हुआ कि गतिक श्यानता गतिक घूर्णी श्यानता से कम है। (16) से (19) तक (20) का मान रखने पर, α के विभिन्न घातों के गुणांकों को समतुलित करने पर और α^2 के मान को उपेक्षित करने पर

$$f_{11}''+f'_{11}=0, \tag{21}$$

$$f_{12}''+f'_{12}=-f_{11}''-2\phi_{11}', \tag{22}$$

$$f_{21}''+f_{21}'-\frac{n}{4}f_{21}=-\frac{n}{4}, \tag{23}$$

$$f_{22}''+f_{22}'-\frac{n}{4}f_{22}=-2\phi_{21}'-f_{21}'', \tag{24}$$

$$\phi_{11}''+\beta\phi_{11}'=0 \tag{25}$$

$$\phi_{12}''+\beta\phi_{12}'=0 \tag{26}$$

$$\phi_{21}''+\beta\phi_{21}'-\frac{n\beta}{4}\phi_{21}=0 \tag{27}$$

$$\phi_{22}''+\beta\phi_{22}'-\frac{n\beta}{4}\phi_{22}=0 \tag{28}$$

संगत परिसीमा प्रतिबन्ध होंगे :

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}=0, f_{12}=0, f_{21}=0, f_{22}=0, \\ \phi_{11}'=-f_{11}'', \phi_{12}'=-f_{12}'', \phi_{21}'=-f_{21}'', \phi_{22}'=-f_{22}'' \end{array}\right\} y=0 \text{ पर} \tag{29}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}\to 1, f_{12}\to 0, f_{21}\to 1\ f_{22}\to 0 \\ \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}\to 0 \end{array}\right\} \text{ज्यों ज्यों } y\to\infty$$

यहाँ भी रूढ़ों से y के प्रति अवकलजों का बोध होता है ।

अब (21) से लेकर (28) तक के समीकरणों को परिसीमा प्रतिबन्धों के अनुसार हल करके (20) में प्रतिस्थापित कर देते हैं ।

इससे हमें

$$f_1=1-e^{-y}+\frac{2\alpha}{\beta^2-\beta}(e^{-y}-e^{-\beta y})-\alpha ye^{-y}, \tag{30}$$

$$f_2=1-e^{-ly}+\frac{2l^2\alpha}{s^2-s-n/4}(e^{-ly}-e^{-sy})-\frac{l^2}{2l-1}ye^{-ly}, \tag{31}$$

$$\phi_1=\left[\frac{2\alpha(1-\beta^2)}{\beta(\beta^2-\beta)}+\frac{(2\alpha-1)}{\beta}\right]e^{-\beta y} \tag{32}$$

$$\phi_2=\left[\frac{2l^3\alpha}{s(2l-1)}-\frac{2l^2(s^2-l^2)}{s(s^2-s-n/4)}-\frac{l^2}{s}\right]e^{-sy} \tag{33}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$l=\frac{1+\sqrt{(1+n)}}{2},\quad s=\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2+n\beta)}}{2}$$

अतः (14) तथा (15) से हमें प्राप्त है कि

$$u(y, t)=1-e^{-y}+\frac{2\alpha}{\beta^2-\beta}(e^{-y}-e^{-\beta y})-\alpha ye^{-y}$$

$$+\epsilon e^{nt}\left[1-e^{-ly}+\frac{2l^2}{s^2-s-n/4}(e^{-ly}-e^{-sy})-\frac{l^2}{2l-1}ye^{-ly}\right] \quad (34)$$

$$\omega(y, t)=\left[\frac{2\alpha(1-\beta^2)}{\beta(\beta^2-\beta)}+\frac{(2\alpha-1)}{\beta}\right]e^{-\beta y}$$

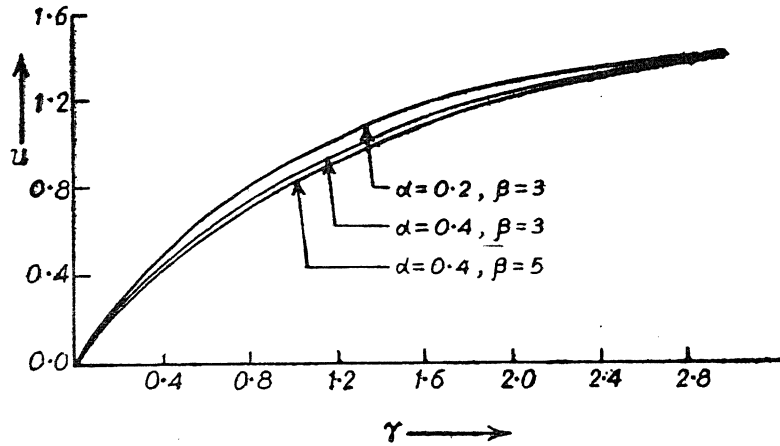
$$+\epsilon e^{nt}\left[\frac{2l^3\alpha}{s(2l-1)}-\frac{2l^2\alpha(s^2-l^2)}{s(s^2-s-n/4)}-\frac{l^2}{s}\right]e^{-sy} \quad (35)$$

पट्टिका की भित्ति पर अ-विमीय घर्षण को (36) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\tau_0=\frac{\tau_0'}{\rho' U_0' v_0'}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=(1-\alpha)+\frac{2\alpha}{\beta^t}\epsilon e^{nt}$$

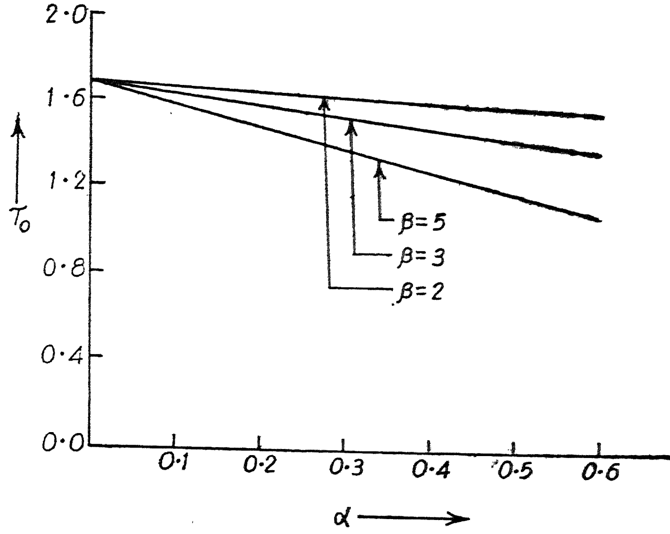
$$\left[l+\frac{2l^2(s-1)}{s^2-s-n/4}-\frac{l^2}{2l-1}\right] \quad (36)$$

अब हम विभिन्न समीकरणों में वेग μ तथा प्राचलों के विभिन्न मानों के लिए चर्म-घर्षण τ_0 के आचरण की विवेचना करेंगे।



$\epsilon=0.2, n=1, nt=1$

चित्र 1: वेग वितरण u विपक्ष γ



$\epsilon=0.2,\ n=1,\ nt=1$

चित्र 2 : α के विपक्ष चर्मघर्षण τ_0

चित्र 1 में $\epsilon=0.2,\ n=1,\ nt=1$ तथा प्राचलों के विभिन्न मानों के लिए y के प्रति वेग क्षेत्र μ का विचरण दिखाया गया है। चित्र से स्पष्ट है कि जब α के एक से मानों के लिए β में वृद्धि होती है तो वेगμ घटता है। इसी तरह जब β के एक से मानों के लिए α में वृद्धि होती है तो भी μ घटता है। इसका अर्थ यह हुआ कि α या β अथवा दोनों के बढ़ाने से वेग घटता है। चित्र 2 में चर्म-घर्षण τ_0 को α के विरुद्ध दिखाया गया है। इस लेखाचित्र से यह निष्कर्ष निकलता है कि α तथा β प्राचलों के बढ़ाने से चर्म-घर्षण घटता जाता है। इस प्रकार संक्षेप में कहा जा सकता है कि जब गतिक घूर्णी श्यानता (ν_r) बढ़ती है तो वेग तथा चर्म-घर्षण घटते हैं जब $\alpha=0$ अर्थात् गतिक घूर्णी श्यानता शून्य है तो वेग क्षेत्र तथा चर्म-घर्षण के व्यंजक पांडे[4] द्वारा दिये गये व्यंजकों का रूप धारण कर लेते हैं।

दशा 2 : घातांकी रूप से ह्रासमान अल्प विक्षोभ

माना कि मुक्त धारा वेग U तथा परिसीमा स्तर में वेग u निम्न प्रकार दिये जाते हैं

$$U=1+\epsilon e^{-nt}, \tag{37}$$

तथा

$$u=f_1(y)+\epsilon e^{-nt} f_2(y), \tag{38}$$

$$\omega=\phi_1(y)+\epsilon e^{-nt}\phi_2(y). \tag{39}$$

अब हम प्रथम अवस्था में वर्णित विधि का अनुसरण करें तो निम्न परिणाम प्राप्त होगा

$$f_1=1-e^{-y}+\frac{2\alpha}{\beta^2-\beta}(e^{-y}-e^{-\beta y})-\alpha y e^{-y}, \tag{40}$$

$$f_2=1-e^{-1_1 y}+\frac{2\alpha 1_1^2}{s_1^2-s+n/4}(e^{-1_1 y}-e^{-s_1 y})-\frac{\alpha 1_1^2}{21_1-1}ye^{-1_1 y} \quad (41)$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\left[\frac{2\alpha(1-\beta^2)}{\beta(\beta^2-\beta)}+\frac{2\alpha-1}{\beta}\right]e^{-\beta y},\\ \phi_2&=\left[\frac{2\alpha 1_1^3}{s_1(21_1-1)}-\frac{2\alpha 1_1^2(s_1^2-1_1^2)}{s_1(s_1^2-s_1+n/4)}-\frac{1_1^2}{s_1}\right]e^{-s_1 y}\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

जहाँ

$$1_1=\frac{1+\sqrt{(1-n)}}{2},\quad s_1=\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2-n\beta)}}{2} \quad (43)$$

अत: (38) तथा (39) से μ तथा ω के मान निम्न प्रकार दिये जाते हैं

$$u=1-e^{-y}+\frac{2\alpha}{\beta^2-\beta}(e^{-y}-e^{-\beta y})-ye^{-y}$$

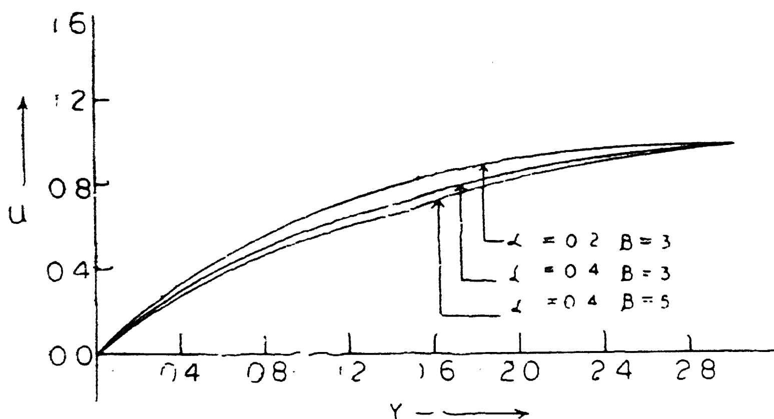
$$+\epsilon e^{-nt}\left[1-e^{-1_1 y}+\frac{2\alpha 1_1^2}{s_1^2-s_1+n/4}(e^{-1_1 y}-e^{-s_1 y})-\frac{\alpha 1_1^2}{21_1-1}ye^{-1_1 y},\right] \quad (44)$$

एवं

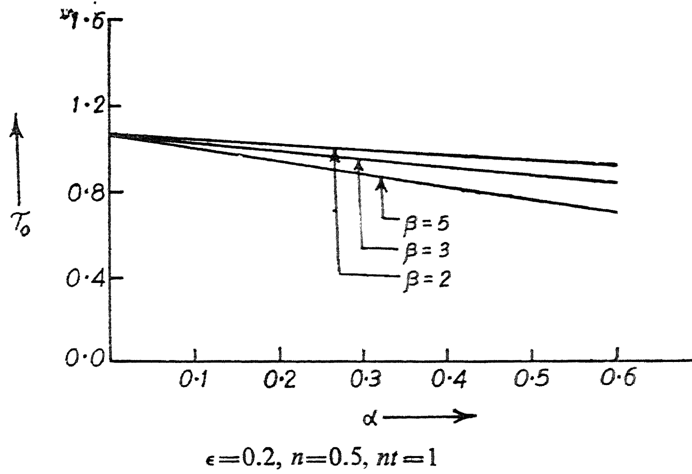
$$\omega=\frac{2\alpha(1-\beta^2)}{\beta(\beta^2-\beta)}+\frac{2\alpha-1}{\beta}e^{-\beta y}+\epsilon e^{-nt}\left[\frac{2\alpha 1_1^3}{s_1(21_1-1)}-\frac{2\alpha 1_1^2(s_1^2-1_1^2)}{s_1(s_1^2-s_1+n/4)}-\frac{1_1^2}{s_1}\right]e^{-s_1 y} \quad (45)$$

भित्ति पर चर्म-घर्षण τ_0 का मान होगा

$$\tau_0=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=(1-\alpha)+\frac{2\alpha}{2}+\epsilon e^{-nt}\left[1_1+\frac{2\alpha 1_1^2}{s_1^2-s+n/4}(s-1)-\frac{\alpha 1_1^2}{21_1-1}\right] \quad (46)$$



चित्र 3



$\epsilon=0.2$, $n=0.5$, $nt=1$

चित्र 4 : α के विपक्ष चर्म घर्षण τ_0

वेग तथा चर्म-घर्षण के लिए व्यंजक प्राप्त करने के पश्चात् अब हम लेखाचित्रों की विवेचना करेंगे। चित्र 3 में y में वृद्धि के साथ ही वेग बढ़ जाता है किन्तु जब α अथवा β अथवा इन दोनों में वृद्धि होती है तो यह घटता है। चित्र 4 के अनुसार चर्म-घर्षण में α तथा β में वृद्धि होने के साथ ही ह्रास होता है। इस दशा में वेग तथा चर्म-घर्षण में होने वाले विचरण दशा 1 के समान हैं।

निर्देश

1. लाइटहिल, एम०जे०, **प्रोसी० रायल सोसा० लंदन**, 1954, A**224**, 1-23
2. स्टुअर्ट, जे०टी०, वही, 1955, A**231**, 116-30
3. मेसीहा, एस०ए०एस०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1966, **62**, 329
4. पाण्डेय, के०एस०, **इंडियन जर्न० फिजि०**, 1968, XLI, 213-222
5. वही, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1971, 35, 87-98
6. ग्रेड, एच०, Commun. Pure Appl. Math., 1952, **5**, 455-498.
7. एरो, ई०एल०, बुलेगिन, ए०एन०, तथा कुवर्शिस्की, ई०वी०, Mechanics, 1965, **29**, 297-308
8. कोविन, एस०सी०, **पी-एच०डी० थीसिस**, पेनसिल्वेनिया स्टेट यूनिवर्सिटी, 1962
9. डाहलर, जे०एस०, Publ. Inc. New York, 1965
10. एरिंगर, ई०सी०, J. Math. Mech., 1966, **16**, 1-18
11. डेएल, एन०वी०, Appl. Math. Me.ch, 1968, **32**, 748-753
12. सुंदलगेकर, वी०एम०, अरानाके, आर०एन० तथा पाप, आई०, Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees, XXII, No. 7.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 2, April, 1981, Pages 177-184

परागोलीय श्रेणी के लघुकीय माध्यों द्वारा परम संकलनीयता

एस०एस० रौतेला
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय,
जयहरीखाल, लैंसडाउन, गढ़वाल

[प्राप्त — मई 29, 1979]

सारांश

परागोलीय श्रेणी के लघुकीय माध्यों द्वारा परम संकलनीयता पर विचार किया गया है।

Abstract

On the absolute summability by logarithmic means of the ultraspherical series. *By*. S.S. Rautela, Department of Mathematics, Government Degree College, Jaiharikhal, Lansdowne (Garhwal).

Absolute summability has been considered by logarithmic means of ultraspherical series.

1. माना कि गोला S पर $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जिसे परास $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ के लिए परिभाषित किया जाता है। इस फलन से सम्बद्ध परागोलीय श्रेणी होगी :

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \iint_S \frac{P_n^{(\lambda)}(\cos w)\, f(\theta', \phi')\, d\sigma'}{(\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi'))^{1/2-\lambda}} \; \lambda > 0 \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\cos w = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' (\cos(\phi - \phi'))$$

तथा

$$d\sigma' = \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$

हम सर्वत्र यह कल्पना करेंगे कि फलन

$$f(\theta', \phi')[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{\lambda-1/2} \tag{1.2}$$

गोले के समूचे पृष्ठ पर समाकलनीय (L) है। काबतेलियांत्ज[1] का अनुसरण करते हुए $f(\theta, \phi)$ के सार्वीकृत माध्य मान को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$f(w)=\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,2\pi\,(\sin w)^2}\int_{Cw}\frac{F(\theta', \phi')\,d\sigma'}{(\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi'))^{1/2-\lambda}} \tag{1.3}$$

जहाँ समाकल को एक लघुवृत्त के साथ साथ लिया जाता है। उसका केन्द्र गोले पर (θ, ϕ) है और जिसकी वक्ररेखीय त्रिज्यार्द्ध w है।

अब श्रेणी (1.1) समानीत होती है (1.4) में

$$f(\theta, \phi)\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2+\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\int_0^{\pi} f(w)\sin^2 w P_n^{(\lambda)}(\cos w)dw \tag{1.4}$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta, \phi)$$

हम लिखेंगे

$$f(w)=f(w)(\sin w)^{2\lambda-1}.$$

यह ज्ञात है कि[3]

$$\sum_{k=0}^{m}(k+\lambda)P_k^{(\lambda)}(\cos w)$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}\int_0^{\pi} F(w)\left[\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x)+P_{n+1}^{(\lambda}(x)\right]_{x=\cos w}\sin w\,dw$$

आंशिक योगफलों का अनुक्रम S_n कोटि एक के रीज लागैरिथ्मिक माध्यों का संकलनीय या संकलनीय $|R, \log n, 1|$ कहलाता है यदि

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{n-1}^{n}\frac{s_n}{n}$$

विद्यमान हो।

2. हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे

प्रमेय : यदि $0<\lambda<1$ तथा

$$F(w\pm t)-F(w)=0\,\frac{(t^{\lambda})}{((\log^{1/t})^{\delta})} \text{ ज्यों ज्यों } t\to 0\ \delta>0 \tag{2.1}$$

तो श्रेणी $f(\theta, \phi)$ शून्य मान तक संकलनीय $| R, \log n, 1 |$ है।

प्रमेयिका 1

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

$0 \leqslant w \leqslant 1/n$ के लिए

$$\frac{d}{dx}\left[P_n^{(\lambda)}(x) + P^{(\lambda)}_{n+1}(x) \right]_{x=\cos w} = 0(n^{2\lambda+1}) \tag{2.2}$$

उपपत्ति के लिए गुप्ता[2] को देखें।

प्रमेयिका 2

$\pi - 1/n \leqslant w \leqslant n$ तथा $0 < \lambda < 1$ के लिए

$$\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x) + P_n^{(\lambda)}(x) \right]_{x=\cos w} = 0(n^{2\lambda}) \tag{2.3}$$

उपपत्ति के लिए गुप्ता[2] को देखें।

प्रमेयिका 3

यदि $\quad a_n \leqslant w \leqslant \pi - 1/n \; (a_n \geqslant 1/n)$

$0 < k < 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 1$ तथा $\mu_n = \dfrac{\pi}{n + \lambda + 1/2}$

$$\frac{d}{dx}\left[P_n^{(\lambda)}(x) + P_{n+1}^{(\lambda)}(x)\right] \sin w \Big|_{x=\cos w} \tag{2.4}$$

$$= R[w^{-\lambda}\phi(w)\, e^{i(n+\lambda+1/2)w}] + 0[n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda}]$$

$$+ 0[n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1}] + 0[n^{\lambda-1}w^{-\lambda}(\sin w)^{-1}]$$

जहाँ $\phi(w)$ ऐसा है कि

$$\phi(w) = 0(n^{\lambda}),\; \phi(w + \mu_n) - \phi(w) = (n^{\lambda-1}w^{-1}) \tag{2.5}$$

उपपत्ति के लिए देखें गुप्ता[2]।

प्रमेयिका 4

परिकल्पना (2.1) के अन्तर्गत

$S_n=0(\log n)^{-\delta}$. श्रेणी (1.1) का nवाँ आंशिक योगफल

$$S_n-f(p)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2+\lambda)}\int_0^{\pi}(F(w)-F(0)\left[\frac{d}{dx}(P_{n+1}^{(\lambda)}(x)+P_n^{(\lambda)}(x))\right]_{x=\cos w}\sin w\,dw$$

द्वारा दिया जाता है। सामान्यता की क्षति हुए बिना हम $f(p)=0$, $F(0)=0$ रख सकते हैं। अब

$$S_n=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}\left[\int_0^{an}+\int_{an}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}\right]$$
$$=I_1+I_2+I_3 \text{ माना} \tag{3.1}$$

अब प्रमेयिका 1 के फल को व्यवहृत करने तथा प्रतिबन्ध (2.1) को सम्प्रयुक्त करने पर

$$I_1=\frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}\int_0^{\alpha_n}F(w)\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x)+P_n^{(\lambda)}(x)\right]_{x=\cos w}\sin w\,dw$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}\int_0^{an}w^{\lambda}\left(\log\frac{1}{w}\right)^{-\delta}wdw\right]$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}a_n\left(\log\frac{1}{a_n}\right)^{-\delta}\int_0^{an}w^{\lambda}dw\right]$$
$$=0[n^{2\lambda+1}\,a_n^{\lambda+2}\,(\log a_n)^{-\delta}]$$
$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.2}$$

जहाँ

$$a_n=n\frac{-(2\lambda+1)}{(\lambda+2)}$$

पुनः, प्रमेयिका 2 से

$$I_3=0\left[n^{2\lambda}\int_{\pi-(1/n)}^{\pi}\sin w\,dw\right]$$
$$=0(n^{2\lambda-2}).$$
$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.3}$$

तथा प्रमेयिकाएँ 3, 4 तथा 5 का सम्प्रयोग करने पर

$$I_2=\int_{\alpha n}^{\pi-(1/n)} F(w)\phi(w)^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}\,dw$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-(1/n)} F(w)n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda}\,dw\right]$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-(1/n)} F(w)n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-1}\,dw\right]$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-(1/n)} F(w)n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1}\,dw\right]$$

$$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}+I_{2\cdot3}+I_{2\cdot4} \text{ माना}$$

अब

$$I_{2\cdot2}=0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-(1/n)} F(w)n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda}\,dw\right]$$

$$=0\left[n^{\lambda-1}\int_{\alpha n}^{\pi/2}\frac{w^{\lambda}}{(\log 1/w)^{\delta}}w^{-1}w^{-\lambda}\,dw+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-\lambda}\,dw\right]$$

$$=0[n^{\lambda-\delta}(\log n)^{1-\lambda}]$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.4}$$

$$I_{2\cdot3}=0\left[n^{\lambda-1}\int_{\alpha n}^{\pi-(1/2)}|F(w)|\,w^{-\lambda}(\sin w)^{-1}\,dw\right]$$

$$=0\left[n^{\lambda-1}\int_{\alpha n}^{\pi/2}\frac{w^{\lambda}}{(\log 1/w)^{\delta}}w^{-\lambda-1}\,dw+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-1}\,dw\right]$$

$$=0(n^{\lambda-1}(\log n)^{1-\delta})$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.5}$$

$$I_{2\cdot4}=0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-1/n}|F(w)|\,n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1}\,dw\right]$$

$$=0\left[n^{-1}\int_{\alpha n}^{\pi/2}\frac{w^{\lambda}}{(\log 1/w)^{\delta}}w^{-\lambda-1}\,dw+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-\lambda-1}\,dw\right]$$

$$=0[n^{-1}(\log n)^{1-\delta}]$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.6}$$

अब हम $I_{2\cdot 1}$ पर विचार करेंगे। समाकल

$$\int_{\sigma n}^{\pi-1/n} F(w)\phi(w)w^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}\,dw$$

$$=1/2\int_{an}^{\pi-1/n} F(w)\phi(w)w^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}\,dw$$

$$-1/2\int_{an-\mu n}^{n-1/n-\mu n} F(w+\mu_n)\phi(w+\mu_n)\,(w+\mu_n)^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}\,dw$$

और यह मोडुलस में

$$1/2(J_1-J_2+J_3+J_4+J_5) \text{ मात्रा}$$

की अपेक्षा न्यून होता है।

अब

$$J_1=\int_{an-\mu n}^{an} |\, F(w+\mu_n)\phi(w+\mu_n)(w+\mu_n)^{-\lambda}\,|\,dw$$

$$=0\left[\int_{\alpha n-\mu n}^{an}(w+\mu_n)^{\lambda}\left(\log\frac{1}{w+\mu_n}\right)^{-\delta}n^{\lambda}(w+\mu_n)^{-\lambda}\,dw\right]$$

$$=0\left[u^{\lambda}\left(\log\frac{1}{a_n}\right)^{-\delta}\mu_n\right]$$

$$=0[n^{\lambda-1}(\log n)^{-\delta}]$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.7}$$

$$J_2=\int_{\pi-1/n-\mu n}^{\pi-1/n}|\,F(w)\,\phi(w)w^{-\lambda}\,|\,dw$$

$$0=\left[\int_{\pi-1/n-\mu n}^{\pi-1/n} n^{\lambda}\,.\,w^{-\lambda}\,dw\right]$$

$$=0(n^{\lambda}\mu_n)$$

$$=0(n^{\lambda-1})$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.8}$$

$$J_3=\int_{an}^{\pi-1/n-\mu n} | F(w+\mu_n)-F(w) | \phi(w+\mu_n)(w+\mu_n)^{-\lambda} dw$$

$$=0\left[\mu_n^{\lambda}\left(\log \frac{1}{\mu_n}\right)^{-\delta} n^{\lambda} \int_{an}^{\tau-1/n-\mu n} (w+\mu_n)^{-\lambda} dw\right]$$

$$=0\left[\mu_n^{\lambda}\left(\log \frac{1}{\mu_n}\right)^{-\delta} n^{\lambda} a_n^{1-\lambda}\right]$$

$$=0[(\log n)^{-\delta} n^{1-\lambda}]$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.9}$$

$$J_4=\int_{an}^{\pi-1/n-\mu n} | \phi(w+\mu_n)-\phi(w) | | F(w) | (w+\mu_n)^{-\lambda} dw$$

$$=0\left[n^{\lambda-1} \int_{an}^{\pi-1/n-\mu n} w^{-1} w^{\lambda} (\log 1/w)^{-\delta} w^{-\lambda} dw \right]$$

$$=0(n^{\lambda-1} (\log n)^{1-\delta})$$

$$=0(\log n)^{-\delta} \tag{3.10}$$

$$J_5=\int_{an}^{\pi-1/n-\mu n} (w+\mu_n)^{-\lambda}-w^{-\lambda} | | F(w) | | \phi(w) | dw$$

$$=0\left[\mu_n \int_{an}^{\pi-1/n-\mu n} w^{-\lambda-1} w^{\lambda} (\log 1/w)^{-\delta} n^{\lambda} dw \right]$$

$$=0[n^{\lambda-1} (\log n)^{1-\delta}]$$

$$=(\log n)^{-\delta} \tag{3.11}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

$$\frac{1}{\log n}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n}{n}=0\left[\frac{1}{\log n}\sum_{n=2}^{\pi} \frac{(\log n)^{-\delta}}{n}\right]$$

$$=0[1] \tag{4.1}$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा०डी०एस० पाण्डे का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होंने अपने बहुमूल्य सुझावों से लाभान्वित किया।

निर्देश

1. काग्बेतलियान्त्ज, ई०, *J. Math. elem.*, 1924, **9**, 107-187.
2. गुप्ता, डी०पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1958, **24**A, 419-440
3. जेगो, जी०, Orthogonial Polynomials, **अमेरिकन मैथ० सोसा० कोलोकियम** पब्लिकेशन्स, 1939

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

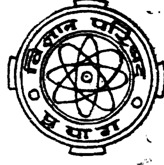
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates

Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 £ *or* $ 4

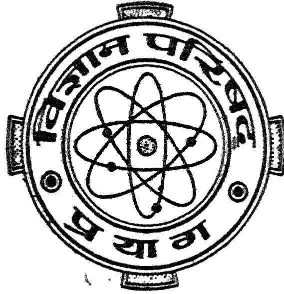
मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
811229

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 24 July 1981 No. 3



The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 185-192

ऐक्वोनिकिल (II) संकर का विभिन्न आधार विद्युतअपघट्यों में बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर अपोपचयन आचरण–2

एम० एस० वर्मा
रसायन अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन
तथा
एच० एल० निगम
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—फरवरी 20, 1980]

सारांश

ऐक्वोनिकिल (II) संकर का पोलेरोग्राफिक आचरण Mg $(NO_3)_2$, Ca $(NO_3)_2$, Sr $(NO_3)_2$ तथा Ba $(NO_3)_2$ के 0.1M की उपस्थिति में अन्वेषित किया गया है। पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण ($E_{1/2}$, i_d, D, α तथा प्रत्रण तथा द्विस्तर प्राचल (E_{max}, q_m, ψ' विभव इत्यादि) निर्धारित किए गए हैं। वैल्चैक-विधि से पुनर्गठन की सक्रियण ऊर्जा, Q_e तथा विसरण की सक्रियण की ऊर्जा, Q_D परिकलित की गई हैं। पोलेरोग्राफिक अभिलक्षणों के परिवर्तन की व्याख्या क्षारीय मृदा धातु धनायनों के Mg^{2+} से Ba^{2+} तक के परिवर्तन के साथ द्विस्तर प्राचलों में हुए परिवर्तनों के आधार पर की गई है। अन्त में, आधार विद्युत-अपघट्यों की सान्द्रता जो द्विसंयोजक धनायनों के लिए 0·1M तथा एक-संयोजक धनायनों के लिए 0·2M है, के अतिरिक्त सभी शर्तों (ताप, pH, विलायक, पारे के स्तम्भ की ऊँचाई, ऐक्वोनिकिल (II) संकर व ट्रिटोन X-100 की सान्द्रता इत्यादि) को समान रखकर, एकसंयोजक क्षारधातु धनायनों एवं द्विसंयोजक क्षारीय मृदा धातु धनायनों के, ऐक्वोनिकिल (II) संकर के इलेक्ट्रोड आचरण पर प्रभाव की तुलना करने का प्रयत्न किया गया है।

Abstract

Redox behaviour of aquonickel (II) complex in different base electrolytes at the dropping mercury electrode, II. *By* M. S. Verma, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain-10, and H. L. Nigam, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

The polarographic behaviour of the aquonickel (II) complex has been investigated in the presence of 0·1M of $Mg(NO_3)_2$, Ca $(NO_3)_2$, Sr $(NO_3)_2$ and Ba $(NO_3)_2$.

Polarographic characteristics ($E_{1/2}$, i_d, D, α and slope) and double layer parameters (E_{max}, q_m, ψ'-potential etc.) have been determined. Activation energy of rearrangement, Q_e and activation energy of diffusion, Q_D have been calculated by Vlcek's method. The explanation of the variation of polarographic characteristics has been founded on the change of double-layer parameters with the change of alkaline earth metal cations from Mg^{2+} to Ba^{2+}. At last, a comparison has been attempted between the influence of monovalent alkali metal cations and divalent alkaline earth metal cations on the electrode behaviour of the aquonickel (II) complex keeping all conditions (temperature, pH, solvent, mercury column height, concentration of aquonickel (II) complex and that of Triton X-100 etc.) constant except the concentration of base electrolytes, which is 0·1M for divalent cations and 0·2M for monovalent cations.

इससे पहले शोधपत्र [1] में ऐक्वोनिकिल (II) संकर के पोलेरोग्राफिक अपचयन का अध्ययन जलीय संकरणहीन आधार विद्युतअपघट्यों जैसे क्षार धातु धनायनों के क्लोराइडों में किया जा चुका है। उस शोधपत्र में साहित्य में विद्यमान कतिपय मतभेदों [2-4] का निराकरण किया गया है। साथ ही साहित्य का सांगोपांग सर्वेक्षण करने पर पता चलता है कि ऐक्वोनिकिल (II) संकर के विद्युत-अपचयन की ऊर्जिकी का अध्ययन क्षारीय मृदा धातु धनायनों की उपस्थिति में बिल्कुल भी नहीं हुआ है। इसीलिए प्रस्तुत शोधपत्र में क्षारीय मृदा धातु धनायनों को Mg^{2+} से Ba^{2+} तक निश्चित सान्द्रता (0·1M) पर परिवर्तित करने पर ऐक्वोनिकिल (II) संकर के पोलेरोग्राफिक अभिलक्षणों जैसे विसरण धारा i_d; अर्द्ध-तरंग विभव, $E_{1/2}$; विसरण गुणांक, D; स्थानान्तर गुणांक, α; सक्रियण ऊर्जा, Q_e; एवं विसरण की सक्रियण ऊर्जा, Q_D, तथा द्विस्तर प्राचलों जैसे ψ'–विभव; इलेक्ट्रोड आवेश घनत्व, q_m, एवं शून्यावेश का विभव, E_{max} जिसे विद्युत्-केशिकत्व उच्चिष्ठ का विभव भी कहते हैं के परिवर्तन पर प्रभाव देखा गया है। साथ ही, एक-संयोजक धनायनों— Li^+, Na^+, K^+, Rb^+ एवं Cs^+ तथा द्विसंयोजक धनायनों Mg^{2+}, Ca^{2+}, Sr^{2+} एवं Ba^{2+} की उपस्थिति में प्राप्त पोलेरोग्राफिक अभिलक्षणों तथा द्विस्तर प्राचलों का तुलनात्मक अध्ययन भी किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त सभी अभिकारक ऐनालर (Analar) श्रेणी के थे। प्रत्येक प्रयोग में निकिल (II) नाइट्रेट की सान्द्रता $2{\cdot}5\times10^{-4}$M थी। ट्रिटोन X-100 (0·001%) उच्चिष्ठ निरोधी के रूप में प्रयोग किया गया था। सभी विलयन चालकतामापी जल में तैयार किये गये थे। परीक्षण विलयन पोलेरोग्राफिक सेल में लिया गया था और उसमें विलीन ऑक्सीजन संशुद्ध नाइट्रोजन के बुद्बुदों द्वारा 30 मिनट में निष्कासित की गई थी। वास्तविक प्रयोग के दौरान पोषित ताप वांछित स्थानों पर दिया गया है।

पोलेरोग्राम कॉलथॉफ तथा लिंगेन [5] द्वारा अनुशंसित हस्त-चालित पोलेरोग्राफिक परिपथ की सहायता से अभिलेखित लिये गये थे। लीड्स एवं नॉरथ्रप का प्रयुक्त विभवमापी 0·1mV तक परिशुद्ध था

तथा तीन शुष्क सेलों द्वारा सामर्थ्य प्रदत्त किया गया था। रुबकिन कम्पनी फिलाडेल्फिया द्वारा निर्मित 'बॉक्स-प्ररूप' धारामापी, जो 4×10^{-9} Amp तक परिशुद्ध था, उपयोग में लाया गया था। सभी विभव ह्यूम एवं हैरिश [6] के संतृप्त रसकपूर इलेक्ट्रोड (SCE) के प्रति मापेगये थे। पोलेरोग्राफिक सेल का प्रतिरोध प्रचलित प्रकार के प्रत्यावर्ती धारा में संयुक्त ह्वीट-स्टोन सेतु से मापा गया था। प्रतिरोध का परिवर्तन 1000 ± 100 ओह्म के परिसर में था, अतः विभवपात का कोई संशोधन नहीं किया गया। बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड का पारा हमारे पहले शोधपत्र [7] में वर्णित विधि द्वारा संशुद्ध किया गया था। बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड के अभिलक्षणों का निर्धारण पारा-स्तंभ की तीन ऊँचाइयों पर किया गया था। उनमें से एक आंकड़ा जो 0·1M $Mg(NO_3)_2$ में खुले परिपथ पर प्राप्त हुआ था, निम्नांकित है :

$h = 40$ Cm, $t = 2{\cdot}7$ sec, $m = 3{\cdot}19$ mg sec^{-1} जहाँ h, पारे के स्तंभ की ऊँचाई ;

t, बिन्दुपात-समय और m, पारे के प्रवाह की दर है।

परिणाम तथा विवेचना

ताप का प्रभाव : ऐक्वोनिकिल (II) संकर के विद्युत्-अपचयन के लिए सभी धारा विभव (c-v) वक्र सभी तापों पर एवं सभी प्रयुक्त आधार विद्युत्अपघट्यों में सुस्पष्ट, विसरण नियन्त्रित, एकल पग दो-इलेक्ट्रोन अपचयन तरंगों के रूप में पाए गए हैं। इन तरंगों के पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण सारणी 1 में दिए गए हैं। $-E_{de}$ vs log $\frac{id - i}{i}$ के आलेखों से परिकलित प्रवणतामान (देखिए सारणी 1) इन तरंगों की सभी तापों पर अनुत्क्रमणीय प्रकृति दिखाते हैं, क्योंकि प्रवणता के प्राप्त मान सिद्धान्ततः परिकलित मानों से सदैव अधिक पाए गये हैं। $E_{1/2}$ के ताप-गुणांकों के धनात्मक मान भी इनकी अनुत्क्रमणीयता [8] की पुष्टि करते हैं। स्थानान्तर गुणांक, α, का मान ऑलधाम एवं पैरी [9] के समीकरण से निकाला गया है। α के मानों में ताप-वृद्धि के साथ कोई नियमित परिवर्तन नहीं होता है। अर्द्ध-तरंग विभव, $E_{1/2}$ का परिकलन आलेख $- E_{de}$ vs log $\frac{x(5{\cdot}5 - x)}{5(1 - x)}$ (जहाँ $x = \frac{i}{i_d}$) के अन्तःखण्ड से किया गया है। ताप-वृद्धि के साथ $E_{1/2}$ का अधिक धनात्मक विभव की ओर विस्थापन उच्चतर ताप पर सरलतर अपचयन की सूचना देता है। इस प्रभाव का कारण ताप-वृद्धि के साथ अधिवोल्टता [10] में कमी हो सकता है। साथ ही, ताप वृद्धि इलेक्ट्रोड में इलेक्ट्रानों की ऊर्जा को बढ़ा सकती है, जिससे इलेक्ट्रान आसानी से फर्मी-तल [11] पर पहुँच सकते हैं, जो इलेक्ट्रोड प्रक्रिया को सुगम बनाते हैं।

चारों ही विद्युत्अपघट्यों में $E_{1/2}$ vs T के आलेख सरल रेखा पाए गए हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि ऐक्वोनिकिल (II) संकर का विद्युत्-अपचयन ताप के साथ अपनी अभिक्रिया की क्रियाविधि किसी भी आधार विद्युत्अपघट्य के माध्यम में नहीं बदलता [12]।

ताप-वृद्धि के साथ विसरणधारा, i_d तथा विसरण गुणांक, D, के मानों में वर्द्धन यह प्रदर्शित करता है कि ताप-वृद्धि के साथ विसरण प्रक्रिया सरलतर हो जाती है।

क्षारीय मृदा धनायनों का प्रभाव : Mg^{2+} से Ba^{2+} तक धनायनों के परिवर्तन के साथ पोलेरोग्राफिक अभिलक्षणों एवं द्विस्तर प्राचलों के परिवर्तन के आंकड़े सारणी 2 में अंकित हैं। प्रस्तुत अन्वेषण

में, विसरण की सक्रियण ऊर्जा, Q_D, वैल्चैक विधि [13] द्वारा, निम्नांकित समीकरण का उपयोग कर, परिकलित की गई है :—

$$\log \frac{i_d}{m^{2/3}t^{1/6}} = \log 0{\cdot}627\ m\ F\ D^{1/2}C - \frac{\frac{1}{2}Q_D}{2{\cdot}3RT} \qquad (1)$$

जहाँ पर F, फैराडे; C विध्रुवक की सान्द्रता तथा R, सार्वत्रिक गैस नियतांक है तथा अन्य सभी पद अपनी प्रचलित सार्थकता रखते हैं। धनायनों के Mg^{2+} से Ba^{2+} तक परिवर्तन के साथ Q_D के मान में जरा सी वृद्धि होती है जो D के मान में संगत कमी को सूचित करती है। यह प्रेक्षण प्रदर्शित करता है कि धनायनों को Mg^{2+} से Ba^{2+} तक परिवर्तित करने के साथ विसरण प्रक्रिया अधिक दुर्गम होती जाती है।

पुनर्गठन की सक्रियण ऊर्जा, Q_e के मानों में भी आधार विद्युत्अपघट्यों के धनायनों के Mg^{2+} से Ba^{2+} तक परिवर्तित करने पर वृद्धि होती है। यह ऊर्जा भी वैल्चैक-विधि [13] से तथा निम्नांकित समीकरण का उपयोग कर, परिकलित की गई है :—

$$\log \left(\frac{i}{i_d - i}\right) = \log A - \frac{Q_e - \frac{1}{2} Q_D}{2{\cdot}3RT} \qquad (2)$$

जहाँ A आवृत्ति कारक है।

ψ'-विभव के मात्रात्मक आंकड़े निम्नांकित समीकरण द्वारा परिकलित किए गए हैं [3] :

$$\psi' = \frac{2RT}{ZF} \text{ arc sinh} \frac{q_m}{C_i} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2RT\sigma}\right)} \qquad (3)$$

जहाँ पर Z=विद्युतअपघट्य के आयन पर आवेश

q_m=इलेक्ट्रोड पर आवेश घनत्व

C_i=सम्बन्धित विद्युत्अपघट्य की सान्द्रता

π=एक नियतांक

σ=कार्यकारी विलयन का परावैद्युतांक

सारणी 2 के आंकड़ों का अनुशीलन प्रदर्शित करता है कि धनायनों के Mg^{2+} से Ba^{2+} तक परिवर्तन के साथ

(अ) $E_{\frac{1}{2}}$ अधिक ऋणात्मक विभव की ओर विस्थापित होता है,

(आ) इलेक्ट्रोड प्रक्रिया की सक्रियण ऊर्जा, Q_e बढ़ती है,

(इ) विद्युत-केशिकत्व उच्चिष्ठ का विभव, E_{max} घटता है,

(ई) इलेक्ट्रोड पर आवेश घनत्व बढ़ता है, तथा

(उ) ψ'-विभव अधिक धनात्मक हो जाता है।

सारणी 2

क्षारीय मृदाधातु नाइट्रेटों में ऐक्वोनिकिल (II) संकर के पोलेरोग्राफिक तथा द्विस्तर अभिलक्षण

[Ni (II)]$=2{\cdot}5\times10^{-4}$M, T$=25\pm0{\cdot}2$°C, Triton X–100=0·001%

आधार विद्युत्अपघट्य (0·1M)	अधिकतम जलयोजन संख्या, निर्देश 14 से उद्धृत	$-E_{\frac{1}{2}}$ (V vs SCE)	Q_e(Kcal) (at – V vs SCE)	$-E_{max}$ (V vs SCE)	$-q_m$ (μC)	ψ'-विभव (at – V vs SCE)
$Mg(NO_3)_2$	9	1·125	14·49	0·56	12·15	0·032
$Ca(NO_3)_2$	4	1·129	14·56	0·53	13·10	0·037
$Sr(NO_3)_2$	4	1·138	14·77	0·49	13·50	0·039
$Ba(NO_3)_2$	0	1·145	15·31	0·44	14·50	0·041

सारणी 3

क्षारधातु क्लोराइडों में ऐक्वोनिकिल (II) संकर के पोलेरोग्राफिक व द्विस्तर अभिलक्षण

[Ni(II)]$=2{\cdot}5\times10^{-4}$M, T$=25\pm0{\cdot}2$°C, Triton X–100=00·01%

आधार विद्युत्अपघट्य (0·2M)	जलयोजित धनायन का आकार, निर्देश 18 से उद्धृत, (°A)	$-E_{\frac{1}{2}}$ (V vs SCE)	Q_e(Kcal) (at –1·10V vs SCE)	$-E_{max}$ (V vs SCE)	$-q_m$ (μC)	ψ'-विभव (at –1·10V vs SCE)
LiCl	3·40	1·045	11·05	0·575	9·45	0·029
NaCl	2·76	1·048	11·25	—	10·15	0·031
KCl	2·32	1·053	11·68	0·550	12·15	0·036
RbCl	2·28	1·054	15·50	—	12·50	0·037
CsCl	2·28	1·060	17·40	0·475	13·50	0·039

उपर्युक्त परिवर्तन प्रदर्शित करते हैं कि $Ni(H_2O)_6^{2+}$ के विद्युत्-अपचयन की इलेक्ट्रोड प्रक्रिया, आधार विद्युत्-अपघट्य धनायनों को Mg^{2+} से Ba^{2+} तक परिवर्तित करने के साथ और अधिक अवरोधित होती जाती है। इसकी निम्न प्रकार व्याख्या हो सकती है :

ऐसी सम्भावना लगती है कि धनाय्नों को Mg^{2+} से Ba^{2+} तक बदलने पर, इन धनायनों की अन्तरापृष्ठ पर निकटतम पहुँच बढ़ जाती है, क्योंकि जलयोजित धनायनों का आकार Mg^{2+} से Ba^{2+} तक घटता जाता है,[14] फलस्वरूप अधिशोषण बढ़ता जाता है, जो प्रतिविम्ब अन्योन्यक्रिया को बढ़ाता है [15] जिसके कारण E_{max} घट जाता है। यह प्रक्रम ψ'- विभव को घटाता अर्थात् अधिक धनात्मक करता है, जो वास्तव में आवेश स्थानान्तर की दर को नियंत्रित करता है।[16, 17]

एक-संयोजक व द्विसंयोजक धनायनों के प्रभाव की तुलना : ऐक्वोनिकिल (II) संकर के विद्युत्-अपचयन के पोलेरोग्राफिक व द्विस्तर अभिलक्षणों पर द्विसंयोजक धनायनों का प्रभाव सारणी 2 तथा एक-संयोजकों का सारणी 3 में दिखाया गया है। दोनों सारणियों के गहन अध्ययन से पता चलता है कि प्रत्येक द्विसंयोजक धनायन अपने तुरन्त पूर्वगामी एक-संयोजक धनायन जैसे—Mg^{2+}, Na^{+} से; Ca^{2+} K^{+} से इत्यादि—की तुलना में प्रत्येक पोलेरोग्राफिक या द्विस्तर प्राचल पर ऐसा प्रभाव डालता है कि द्विसंयोजक की उपस्थिति में $Ni(H_2O)_6^{2+}$ के विद्युत्-अपचयन की इलेक्ट्रोड प्रक्रिया अधिक अनुत्क्रमणीय हो जाती है। इस प्रभाव का विद्यमान परिस्थितियों में यद्यपि कोई सटीक स्पष्टीकरण नहीं दिया जा सकता लेकिन, अनुमानतः इसका कारण द्विसंयोजक धनायन की उपस्थिति में ψ'-विभव के अधिक धनात्मक होने अथवा इलेक्ट्रोड आवेश घनत्व के वर्द्धन में छिपा हो सकता है।

निर्देश

1. वर्मा, एम० एस०; सिंह, एस० एस० तथा निगम, एच० एल०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1979 (प्रकाशनाधीन)
2. झडानोव, एस० आई०, केशिए, ई० ए० एम० तथा स्टैट्सिबैंक, **जर्न० इलैक्ट्रोऐना लै० केमि०**, 1977, **79**, 365.
3. डाण्डी, जे० तथा जीअर्स्ट, एल०, **वही** 1961, **2**, 116.
4. वैल्वैक, ए० ए०, **जाइट० इलेक्ट्रो केमि०**, 1958, **61**, 1014.
5. कॉलथॉफ, आई० एम० तथा लिंगेन, जे० जे०, Polarography, इंटरसाइंस न्यूयार्क 1952, पृष्ठ 300.
6. ह्यूम, डी० एम० तथा हैरिश, एच० ई०, Ind. Engng. Chem., Analyt. Ed., 1943, **15**,465.
7. वर्मा, एम० एस०, शर्मा, एच० एस० तथा निगम, एच० एल०, **इंडियन जर्न० केमि०**, 1979, **18A**, 130.
8. माइट्स, एल०, Polarographic Techniques, इंटरसाइंस न्यूयार्क, 1965, पृष्ठ 139.

9. आॅलधाम, के० बी० तथा पैरी, ई० पी०, Analyt. Chem., 1968, **40**, 65.

10. ग्लास्टन, एस०, An Introduction to Electrochemistry, ऐफिलिएटैड ईस्ट-वैस्ट प्रेस, मद्रास, 1975, पृष्ठ 462.

11. बुकरिश, जे० ओम, **जर्न० केमि० एजू०**, 1971, **48**, 352

12. वैल्चैक, ए० ए०, Progress in Inorganic Chemistry, (Ed. F.A. Cotton, इंटरसाइंस न्यूयार्क), 1963, 5, 211.

13. वही, Coll Czech. Chem. Communs., 1959, **24**, 3538.

14. डूरण्ट, पी० जे० तथा डूरण्ट, बी० Introduction to Advanced Inorganic Chemistry, (The English Language Book Society and Longman Group Ltd.), 1970, पृष्ठ 455.

15. बुकरिश, जे० ओम, तथा रेड्डी, ए० के० एन०, Modern Electrochemistry, (Plenum Press, Oxford) 1973, **2**, p. 691.

16. ग्राहम, डी० सी०, Chem. Rev., 1947, **41**, 441.

17. फ्रुमकिन, ए० एन०, **ट्राजै० फैराडे सोसा०**, 1959, **55**, 156.

18. कॉटन, एफ० ए० तथा विल्किसन, जी०, Advanced Inorganic Chemistry, **विले ईस्टर्न** प्रा० लि० नई दिल्ली, 1969, पृष्ठ 422.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 193-200

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के लिए कुछ आवर्ती तथा समाकल सम्बन्ध

के० एम० प्रधान
40, सिविल लाइन्स, देवास

[प्राप्त—दिसम्बर 26, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हाल ही में प्रधान द्वारा अनुमोदित सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद का उपयोग करते हुए इस बहुपद के हेतु अवकल आवर्ती तथा समाकल सम्बन्ध प्राप्त किये गये हैं। कतिपय विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है।

Abstract

On some recurrence and integral relations for generalized hypergeometric polynomials. *By* K.M. Pradhan, 40, Civil Lines, Dewas.

In this paper, making the use of the generalized hypergeometric polynomial recently introduced by Pradhan[3], the author obtains differential recurrence and integral relations for the generalized hypergeometric polynomial. Certain particular cases are also being discussed.

1. भूमिका

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाल ही में प्रधान[3] द्वारा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद के लिए प्राप्त किये गये दो अवकल आवर्ती सम्बन्धों को निम्नलिखित रूप में प्राप्त करना है।

$$F_n(x) = {}_{p+k}F_{q+\lambda}\left[\begin{matrix} \triangle(-n, k), a_1, \ldots, a_p\ ; \\ \triangle(a, \lambda), b_1, \ldots, b_q\ ; \end{matrix}\ ux^{\mu}\right] \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-n+i}{k}\right)_r (a_p)_r u^r x^{\mu r}}{r!(b_q)_r \prod_{j=0}^{\lambda-1} \left(\frac{a+j}{\lambda}\right)_r},$$

जहाँ k, n, λ तथा α अनृण पूर्णाङ्क हैं तथा $\triangle(\alpha, \lambda)$ से निम्नलिखित प्राचलों का बोध होता है

$$\alpha/\lambda, (\alpha+1)/\lambda, \ldots, (\alpha+\lambda-1)/\lambda,$$

तथा

$$(a_p)_r = \prod_{i=1}^{p} (a_i)_r; \ (b_q) = \prod_{j=1}^{q} (b_j)_r$$

बहुपद (1.1) सार्वीकृत रूप में है अतः प्राचलों के उपयुक्त चुनाव से इससे कई ज्ञात बहुपद प्राप्त होते हैं।

हाल ही में प्रधान[4] ने बहुपद (1.1) के लिए निम्नलिखित जनक फलन प्राप्त किये हैं।

$$(1-t)^{-\alpha} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ b_q, \ldots, b_q; \end{matrix} u\sigma^\sigma(-t)^k x^\mu/(1-t)^\sigma\right] \tag{1.2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n/n! \ {}_{p+\sigma}F_{q+\sigma} \left[\begin{matrix} \triangle(-n, k), \triangle(\alpha+n, \sigma-k), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(\alpha, \sigma), b_1, \ldots, b_q; \end{matrix} uk^k(\sigma-k)^{\sigma-k} x^\mu\right] t^n, \ \sigma \geqslant k,$$

$$(1-t)^{-\alpha} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ b_1, \ldots, b_q; \end{matrix} u\sigma^\sigma(-t)^k x^\mu/(1-t)^\sigma\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n/n! \ {}_{p+k}F_{q+k} \left[\begin{matrix} \triangle(-n, k), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(\alpha, \sigma), \triangle(-\alpha-n, k-\sigma), b_1, \ldots, b_q; \end{matrix} (\sigma-k)^{\sigma-k} x^\mu\right] t^n, \ k \geqslant \sigma, \tag{1.3}$$

जहाँ k तथा σ अनृण पूर्णाङ्क हैं।

2. अवकल आवर्ती सम्बन्ध

माना

$$F = (1-t)^{-\alpha} G(y), \ y = u\sigma^\sigma(-t)^k x^\mu/(1-t)^\sigma,$$

तो हमें

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(1-t)^{-\alpha}\, G'(y)u\sigma^{\sigma}(-t)^{k}\, \mu x^{\mu-1}/(1-t)^{\sigma}, \tag{2.1}$$

तथा

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\alpha(1-t)^{-\alpha-1}\, G(y)-u\sigma^{\sigma}(-t)^{k-1}x^{\mu}(1-t)^{-\alpha-\sigma-1}. \quad [k+t(\sigma-k)]\, G'(y), \tag{2.2}$$

प्राप्त होते हैं जहाँ

$$G'(y)\equiv d/dy[G(y)]$$

अब F से निम्नांकित अवकल समीकरण की तुष्टि होती है :

$$x(k+\overline{\sigma-k}\, t)\ \frac{\partial F}{\partial x}-\mu t(1-t)\ \frac{\partial F}{\partial x}=-\mu\alpha t F \tag{2.3}$$

किन्तु (1.2) से

$$F=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n,$$

(2.3) में दोनों पक्ष के t^n गुणांकों को संतुलित करने पर

$$x[kg'_n(x)+(\sigma-k)g'_{n-1}(x)]=-\mu(\alpha+n-1)g_{n-1}(x)+\mu n g_n(x), \tag{2.4}$$

जिसका उपयोग $g_n(x)$ की श्रेणी के रूप में $xg'_n(x)$ के लिए व्यंजक विकसित करने के लिए किया जा सकता है।

इसके लिए माना कि

$$g_n(x)=(-1)^n\, p_n(x);$$

तो (2.4) का रूप होगा :

$$x[kp'_n(x)-(\sigma-k)p'_{n-1}(x)]=\mu(\alpha+n-1)p_{n-1}(x)+\mu n p_n(x)$$

अब घात को कई बार हटाने पर

$$\left\{\begin{array}{l} x[kp'_{n-1}(x)-(\sigma-k)p'_{n-2}(x)]=\mu(\alpha+n-2)p_{n-2}(x)+\mu(n-1)p_{n-1}(x) \\ x[kp'_{n-2}(x)-(\sigma-k)p'_{n-3}(x)]=\mu(\alpha+n-3)p_{n-3}(x)+\mu(n-2)p_{n-2}(x) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x[kp'_2(x)-(\sigma-k)p'_1(x)]=\mu(\alpha+1)p_1(x)+\mu(2)p_2(x) \\ x[kp'_1(x)-(\sigma-k)p'_0(x)]=\mu(\alpha)p_0(x)+\mu(1)p_1(x) \end{array}\right. \tag{2.6}$$

(2.6) के समीकरणों को क्रमशः

$$(\sigma-k)/k,\ (\sigma-k)^2/k^2,\ \ldots,\ (\sigma-k)^{n-2}k^{n-2},\ (\sigma-k)^{n-1}/k^{n-1}$$

से गुणा करने पर एवं इन्हें (2.5) में जोड़ने पर

$$kxp'_n(x)=\mu np_n(x)+\mu/k[k\alpha+\sigma(n-1)]p_{n-1}(x)$$
$$+\mu/k(\sigma-k)/k[k\alpha+\sigma(n-2)]p_{n-2}(x)+\ldots\ldots+$$
$$\mu/k(\sigma-k)^{n-2}/k^{n-2}[k\alpha+\sigma\ .\ 1]p_1(x)$$
$$+\mu/k(\sigma-k)^{n-1}/k^{n-1}[k\alpha+\sigma\ .\ 0]p_0(x) \qquad (2.7)$$

(2·7) के दोनों पक्षों में $(-1)^n$ से गुणा करने एवं $g_n(x)=(-1)np_n(x)$ का उपयोग करने पर हमें एक अन्य अवकल आवर्ती सम्बन्ध (2·8) प्राप्त होता है

$$k\times g'_n(x)=\mu ng_n(x)+\mu/k\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\left(\frac{\sigma-k}{k}\right)^{n-r-1}(k\alpha+\sigma r)g_r(x), \qquad (2.8)$$

3. विशिष्ट दशायें

3.1 (2.4) तथा (2.8) की विशिष्ट दशायें

(i) जब
$\mu=k=u=1,\ \sigma=2,\ \alpha=1+a+b,\ a_1=(1+a+b)/2,\ a_2=(2+a+b)/2,\ b_1=1+a,\ b_2=\frac{1}{2}$

तो

$$xC'_n(x)-nC_n(x)=-(n+a+b)C_{n-1}(x)-xC'_{n-1}(x), \qquad (3.1.1)$$

तथा

$$xC'_n(x)=nC_n(x)+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}(1+a+b+2r)C_r(x) \qquad (3.1.1a)$$

जहाँ

$$C_n(x)=(1+a+b)_n/(1+a)_n\,f_n^{(a,\,b)}\begin{bmatrix}a_3,\ \ldots,\ a_p; & \\ & x\\ b_3,\ \ldots,\ b_q; & \end{bmatrix}$$

(3·1·1) तथा (3·1·1a) सार्वीकृत सिस्टर सेलीन के बहुपदियों के अवकल आवर्ती सम्बन्ध हैं और $a=b=0$ रखने पर क्रमशः [6, p. 292, (13)] एवं [6, p. 292, (15)] सिस्टर सेलीन के बहुपदिय में समानीत हो जाते हैं।

(ii) $p=3,\ q=\sigma=2,\ k=u=\mu=1,\ a_1=(1+a+b)/2,\ a_2=(2+a+b)/2,\ a_3=\rho,$ $b_1=1+a,\ b_2=\sigma',\ \alpha=1+a+b,$ रखने पर हमें सार्वीकृत राइस के बहुपदियों के लिए निम्नांकित आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होता है

$$xK'_n(x)-nK_n(x)=-(n+a+b)K_{n-1}(x)-xK'_{n-1}(x), \tag{3.1.2}$$

तथा

$$xK'_n(x)=nK_n(x)+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}(1+a+b+2r)K_r(x),$$

जहाँ

$$K_n(x)=(1+a+b)_n/(1+a)_n H_n^{(a,b)}(\rho,\sigma',x) \tag{3.1.2a}$$

परिणाम (3.1.2) सम्बन्ध [**6**, p. 288, (7)] में समानीत होता है जबकि (3.1.2a) राइस के बहुपदी [6, p. 288 (10)] में समानीत होता है यदि $a=b=0$ रखें।

(iii) $\rho=\sigma'$ मानने पर जैकोबी बहुपदों के लिए (3.1.2) तथा (3.1.2a) क्रमशः आवर्ती संबंधों [**6**, p. 262, (3)] तथा [6, p. 262(5)] में बदल जाते हैं।

(iv) $p=q=k=\sigma=u=\mu=1,\ a_1=\alpha,\ b_1=1+a,$ रखने पर हमें लागेर बहुपदियों के लिए आवर्ती सम्बन्ध [6, p. 202, (1)] प्राप्त होता है।

(v) $p=q=k=u=\mu=1,\ \sigma=2,\ a_1=c,\ b_1=1+b,\ \alpha=2c,$ मानने पर बेसेल बहुपदियों के सार्वीकरणों में से एक के लिए निम्नलिखित आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होते हैं

$$xA'_n(x)-nA_n(x)=-(2c+n-1)A_{n-1}(x)-xA'_{n-1}(x), \tag{3.1.3}$$

तथा

$$xA'_n(x)=nA_n(x)+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}(2c+2r)A_r(x), \tag{3.1.3a}$$

जहाँ

$$A_n(x)=(2c)_n/n!\ {}_2F_2\,[-n,2c+n;c+\tfrac{1}{2},1+b;x]$$

अब $c=\frac{1}{2}$ तथा $b=0$ रखने पर (3.1.3) तथा (3.1.3a) क्रमशः बेटमैन के बहुपदियों के आवर्ती सम्बन्ध [6, p. 285 (5)] तथा [6, p. 286(7)] हो जाते हैं।

(vi) $p=\sigma=2,\ q=0,\ k=\mu=1,\ u=-1/b,\ a_1=(a-1)/2,\ a_2=a/2,\ \alpha=a-1,$ रखने पर क्राल तथा फ्रिंक [2] के सार्वीकृत बेसेल बहुपदियों के लिए आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होता है जो इस प्रकार है :

$$\begin{aligned} x[(a-1)_n/n!\ y'_n(x,a,b)+(a-1)_{n-1}/(n-1)!\ y'_{n-1}(x,a,b)] \\ =n(a-1)_n/n!\ y_n(x,a,b)-(a+n-2)(a-1)_{n-1}/(n-1)! \\ \cdot\, y_{n-1}(x,a,b), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

तथा

$$x(a-1)_n/n!\ y'_n(x, a, b)=n(a-1)_n\ y_n(x, a, b)/n!$$

$$+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}(a-1+2r)(a-1)_r\ .\ 1/r!\ y_r(x, a, b), \tag{3.1.4a}$$

जिसमें यदि $a=c+1$ तथा $b=-1$ रखा जाय तो उनके रूप

$$x[\phi'_n(c, x)+\phi'_{n-1}(c, x)]=n\phi_n(c, x)-(c+n-1)\phi_{n-1}(c, x), \tag{3.1.5}$$

तथा

$$x\phi'_n(c, x)=n\phi(c, x)+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}(c+2r)\phi_r(c, x), \tag{3.1.5a}$$

हो जाते हैं जो ज्ञात परिणामों [6, p. 295, (8)] की तरह हैं जहाँ $\phi_n(c, x)$ रेनविले के सार्वीकृत बहुपद हैं [6, p. 294, (3)]।

4. समाकल सम्बन्ध

परिणामी श्रेणी के अभिसरण के क्षेत्र के अन्तर्गत

$$ {}_{p+k+\mu}F_{q+\sigma+\mu}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k),\ \triangle(\gamma, \mu),\ a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(\alpha, \sigma),\ \triangle(\gamma+\delta, \mu),\ b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\ ut^{\mu}\right]$$

$$=1/[^{\gamma+\delta-1}B(\gamma, \delta)]\int_0^t x^{\gamma-1}(t-x)^{\delta-1}.$$

$$ {}_{p+k}F_{q+\sigma}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k),\ a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(\alpha, \sigma),\ b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\ ux^{\mu}\right]dx. \tag{4.1}$$

जहाँ $Re(\gamma)>0$, $Re(\delta)>0$, पूर्णाङ्क $\mu>0$.

इसी तरह जब $\mu=-\mu'$ जहाँ μ', धनात्मक पूर्णाङ्क है तो हमें (4.2) प्राप्त होगा

$$ {}_{p+k+\mu'}F_{q+\sigma+\mu'}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k),\ \triangle(-\gamma-\delta, \mu'),\ a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(\alpha, \sigma),\ \triangle(-\gamma, \mu'),\ b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\ ut^{-\mu'}\right]$$

$$=1/[t^{\gamma+\delta-1}B(\gamma, \delta)]\int_0^t x^{\gamma-1}(t-x)^{\delta-1}\ {}_{p+k}F_{q+\sigma}$$

$$\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, \sigma), b_1, \ldots, b_q;\end{matrix} \; ux^{-\mu'}\right] dx, \tag{4.2}$$

जहाँ $\quad Re(\gamma)>0, Re(\delta)>0.$

पुनश्च $t=1$ रखने तथा x के स्थान पर $x/(1+x)$ रखने पर (4.1) तथा (4.2) से

$$_{p+k+\mu}F_{q+\sigma+\mu}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k), \triangle(\gamma, \mu), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, \sigma), \triangle(\gamma+\delta, \mu), b_1, \ldots, b_q;\end{matrix} \; u\right]$$

$$=1/B(\gamma, \delta)\int_0^{\infty} x^{\gamma-1}(1+x)^{-\gamma-\delta} \; _{p+k}F_{q+\sigma}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, \sigma), b_1, \ldots, b_q;\end{matrix} \; u\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\mu}\right] dx, \tag{4.3}$$

तथा

$$_{p+k+\mu'}F_{q+\sigma+\mu'}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k), \triangle(-\gamma-\delta, \mu'), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, \sigma), \triangle(-\gamma, \mu'), b_1, \ldots, b_q;\end{matrix} \; u\right]$$

$$=1/B(\gamma, \delta)\int_0^{\infty} x^{\gamma-1}(1+x)^{-\gamma-\delta} \; _{p+k}F_{q+\sigma}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k), a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, \sigma), b_1, \ldots, b_q;\end{matrix} \; u\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\mu'}\right] dx \tag{4.4}$$

5. विशिष्ट दशायें

(i) जब $k=\mu=\sigma=t=1$, $a_1=n+a+b+1$, $b_1=1/2$, $\alpha=1+a$, तो (4.1) तथा (4.3) क्रमशः

$$_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-n, n+a+b+1, \gamma, a_2, \ldots, a_p; \\ 1+a, 1/2, \gamma+\delta, b_2, \ldots, b_q;\end{matrix}\right]$$

$$=n!/[(1+a)_n B(\gamma, \delta)]\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}. \; f_n^{(a,b)}\left[\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p; \\ b_2, \ldots, b_q;\end{matrix} \; ux\right] dx, \tag{5.1}$$

तथा

$$ {}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-n,\ n+a+b+1,\ \gamma,\ a_2,\ \ldots,\ a_p; \\ 1+a,\ 1/2,\ \gamma+\delta,\ b_2,\ \ldots,\ b_q;\end{matrix}\ u\right] $$

$$ =n!/[(1+a)_n B(\gamma,\delta)]\int_0^\infty x^{\gamma-1}(1+x)^{-\delta-\gamma}. $$

$$ f_n^{(a,b)}\left[\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p; \\ b_2,\ \ldots,\ b_q;\end{matrix}\ ux/(1+x)\right]dx, \tag{5.2} $$

में समानीत हो जाते हैं जो सार्वीकृत सिस्टर सेलीन के बहुपद के समाकल सम्बन्ध हैं और जो $a=b=0$ रखने पर इसके आगे सिस्टर सेलीन के बहुपद में समानीत हो जाते हैं।

इसी प्रकार से अग्रसर होकर सार्वीकृत राइस, जैकोबी, लागेर, बेटमैन, सार्वीकृत बेसेल बहुपदियों को प्राप्त किया जा सकता है। साथ ही (4·1) से लेकर (4·4) तक का प्रयोग करते हुए प्राचलों के विशिष्टीकरण से हर्माइट, लोमेल, बेडिएण्ट के बहुपद प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. खांडेकर, पी०आर०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इण्डिया**, 1964, **34**, 157-162
2. क्राल, एच०एल० तथा फ्रिंक, ओ०, **ट्रांजै०अमे० मैथ० सोसा०**, 1949, **65**, 100-115
3. प्रधान, के०एम०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1979, **22**, 89-98
4. वही, **मैथ० स्टुडेण्ट** (प्रकाशाधीन)
5. रेनविले, ई०डी०, **कनै० जर्न० मैथ०**, 1953, **15**, 104-106
6. वही, Special Functions. न्यूयार्क, 1960

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 201-210

फूरियर श्रेणी की परम हार्मोनिक संकलनीयता

वेद प्रकाश

गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जनवरी 17, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य फूरियर श्रेणी की परम हार्मोनिक संकलनीयता के प्रमेय को निम्नलिखित रूप प्रदान करना है।

यदि $f(x)$ परबिद्ध विचरण वाला हो और

$$\omega(h)=0\frac{1}{(\log 1/h)^{1+\alpha+\epsilon}}\ (\epsilon>0;\ 0\leqslant\alpha<1)$$

तो

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\ .\ A_n(t)$$ पूर्णतः हार्मोनिक संकलनीय है।

Abstract

On the absolute harmonic summability of a Fourier series. *By* Ved Prakash, Department of Mathematics, University of Sagar Sager.

The object of the paper is to extend tne theorem on absolute harmonic summability of Fourier series in the following form.

If $f(x)$ is of bounded variation and

$$\omega(h)=0\left(\frac{1}{(\log 1/h)^{1+\alpha+\epsilon}}\right)\ (\epsilon>0;\ 0\leqslant\alpha<1)$$

then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha} \, . \, A_n(t)$$

is absolutely harmonic summable.

1. माना कि $f(t)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और $(-\pi, \pi)$ पर समाकलनीय (L) है। सामान्यता की क्षति हुए बिना यह कल्पना कर सकते हैं कि $f(t)$ की फूरियर श्रेणी का अचर पद शून्य है जिससे

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \tag{1.1}$$

तथा

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का अ-वर्द्धमान अनुक्रम है तो हम लिखेंगे कि

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n (P_{-1} = p_{-1} = 0).$$

अनुक्रमशः रूपान्तर

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{n-\nu} S_{\nu} (P_n \neq 0) \tag{1.2}$$

अनुक्रम के नारलुण्ड माध्यों के अनुक्रम $\{t_n\}$ को परिभाषित करता है।

माना कि S_n से श्रेणी $\Sigma a_n(x)$ का n वां आंशिक योगफल सूचित होता है। श्रेणी $\Sigma a_n(x)$ को नारलुण्ड माध्यों के द्वारा परम संकलनीय कहा जाता है अर्थात् संकलनीय $[N, p_n]$, x के समस्त मानों के लिए, यदि

$$\sum_{n=1}^{\infty} | t_n - t_{n-1} | < \infty. \tag{1.3}$$

विशिष्ट दशाओं में जहाँ $P_n = \frac{1}{n+1}$ फलतः $P_n \sim \log n$ ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, नारलुण्ड माध्य हार्मोनिक माध्य[2] में समानीत हो जाता है।

यह ज्ञात है कि समाकलनीयता की विधि पूर्णतः नियमित है और प्रत्येक धनकोटि की परम चिजारो संकलनीयता को बताती है।

हम निम्नलिखित संकेतनों को व्यवहृत करते हैं :

$$\phi(t)=\tfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\} \tag{1.4}$$

$$\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kt}{k+1} \tag{1.5}$$

$$\beta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kt}{k+1} \tag{1.6}$$

$$\alpha(n)=\int_0^{\pi}\phi(t)\,.\,\alpha(t)\,.\,\cos(nt)dt \tag{1.7}$$

$$\beta(n)=\int_0^{\pi}\phi(t)\,.\,\beta(t)\,.\,\sin(nt)dt \tag{1.8}$$

$$\omega(t)=\tfrac{1}{2}\mid f(x+t)-f(x)\mid \tag{1.9}$$

2. वार्ष्णेय[3] ने फूरियर श्रेणी की परम हार्मोनिक संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय A

यदि $f(x)$ परिबद्ध विचरण वाला हो तथा

$$\mid f(x+h)-f(x)\mid \leqslant A\left(\frac{1}{(\log 1/h)^{1+\epsilon}}\right)(\epsilon>0;\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi) \tag{2.1}$$

की तुष्टि करता हो तो श्रेणी (1.1) परम हार्मोनिक संकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उपयुक्त प्रमेय को निम्नांकित रूप में विस्तीर्ण करना है :

प्रमेय

यदि $f(x)$ परिबद्ध विचरण वाला है और

$$\omega(h)=0\left(\frac{1}{(\log 1/h)^{1+\alpha+\epsilon}}\right)(\epsilon>0;\ 0\leqslant\alpha<1)$$

तो

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,.\,A_n(t)$$

पूर्णतः हार्मोनिक संकलनीय है।

प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमे निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

यदि $\{U_k\}$ एकदिष्टतः घटकर शून्य होता है तो श्रेणी $\Sigma U_k \,.\, \sin kx$ तथा श्रेणी $\Sigma U_k \cos kx$ अन्तराल $0<\eta\leqslant x\leqslant 2\pi-\eta$ में समरूप से अभिसारी होती है ।

प्रमेयिका 2[3]

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos (n-k)t}{k+1}=\frac{1}{2(n+1)}+0\left(\frac{1}{n^2t^2}\right)\ (t\geqslant 1/n)$$

प्रमेयिका 3[3]

$$\sum_{k=0}^{n-1}P_k\cos (n-k)t=0\ \left(\frac{1+\log 1/t}{t}\right)-\tfrac{1}{2}P_{n-1}(t\geqslant 1/n)$$

3. प्रमेयिका की उपपत्ति

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम

$$\sum_{n}|\ t_n-t_{n-1}\ |<\infty \text{ को सिद्ध करेंगे ।} \tag{3.1}$$

(1.2) से

$$t_n-t_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_k}{P_n}-\frac{P_{k-1}}{P_{n-1}}\right)A_{n-k}(t)$$

$$=\frac{1}{P_nP_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)A_{n-k}(t).$$

$t=x$ पर $f(t)$ की फूरियर श्रेणी के लिए

$$A_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\cos nt\, dt$$

जिससे कि श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^{\alpha}\,.\,A_n(t)$$

के लिए हमें

$$\frac{\pi}{2}(t_n-t_{n-1})=\int_0^{\pi}\phi(t)\left\{\frac{(\log(n-k))^{\alpha}}{P_nP_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_n}{n+1}\right)\cos (n-k)t\right\}dt$$

$$=\frac{(\log(n-k))^{\alpha}}{P_nP_{n-1}}\int_0^{\pi}\phi(t)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n}{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n}{k+1}-\sum_{k=n}^{n-1}\frac{P_k}{n+1}\right\}\cos (n-k)tdt$$

प्राप्त होता है। अतः

$$\frac{\pi}{2} \mid t_n - t_{n-1} \mid \leqslant \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \mid \int_0^\pi \phi(t) \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{\cos (n-k)t}{k+1} \right) dt \mid$$

$$+ \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \mid \int_0^{1/n} \phi(t) \left(\sum_{k=n}^\infty \frac{\cos (n-k)t}{k+1} \right) dt \mid$$

$$+ \frac{(\log n)^\alpha}{(n+1) P_n P_{n-1}} \mid \int_0^{1/n} \phi(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k \cos (n-k)t \right) dt \mid$$

$$+ \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \mid \int_{1/n}^\pi \phi(t) \left\{ \sum_{k=n}^\infty \frac{\cos (n-k)t}{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k \cos (n-k)t}{(n+1) P_n} \right\} dt \mid$$

$= I_1 - I_2 + I_3 + I_4$, माना।

अत:

$$\frac{\pi}{2} \sum_n \mid t_n - t_{n-1} \mid = \sum_n I_1(n) + \sum_n I_2(n) + \sum_n I_3(n) + \sum_n I_4(n)$$

चूंकि $\phi(t)$ सम है $t \geqslant 0$ के लिए जिससे $\mid \phi(t) \mid \leqslant 2\omega(t)$.

अब $\frac{1}{n+1}$ स्थिर रूप से शून्य तक घटता है, $\sum_{k=n}^\infty \frac{\cos (n-k)t}{k+1}$ $t=0$ के लिए अभिसारी है और इसका योगफल $\frac{4}{(n+1) \mid 1 - e^{-it} \mid}$ से नहीं बढ़ता। प्रमेयिका 1 के अनुसार

$$\sum_2^\infty I_2(n) \leqslant \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \int_0^{1/n} \mid \phi(t) \mid \mid \sum_{k=n}^\infty \frac{\cos (n-k)t}{k+1} \mid dt$$

$$\leqslant \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \int_0^{1/n} (t) 0 \left(\frac{1}{nt} \right) dt$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{n P_{n-1}} \int_0^{1/n} \frac{dt}{t (\log 1/t)^{1+\alpha+\epsilon}}$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{n P_{n-1}} \mid \frac{1}{(\log 1/t)} \mid_0$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{1}{n (\log n)^{1+\epsilon}}$$

$$= 0(1) \tag{3.2}$$

जहाँ A परम अचर है किन्तु इसके लिए आवश्यक नहीं है कि वह प्रत्येक बार एक सा हो।
अब

$$\sum_2^\infty I_3(n) \leqslant \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{(n+1)P_nP_{n-1}} \int_0^{1/n} |\phi(t)| \, |\sum_{k=0}^{n-1} P_k \cos(n-k)t \,| dt$$

$$\leqslant \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{(n+1)P_nP_{n-1}} \int_0^{1/n} \omega(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} | P_k | \right) dt$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{1}{(\log n)^{1-\alpha}} \int_0^{1/n} \frac{dt}{(\log 1/t)^{1+\alpha+\epsilon}}$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1+\epsilon}}$$

$$=0(1). \tag{3.3}$$

आगे भी

$$\sum_2^\infty I_4(n) = \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \left| \int_{1/n}^\pi \phi(t) \left\{ \sum_{k=n}^\infty \frac{\cos(n-k)t}{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k \frac{\cos(n-k)t}{(n+1)P_n} \right\} dt \right|$$

प्रमेयिका 2 तथा 3 का उपयोग करने पर

$$\sum_2^\infty I_4(n) \leqslant A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{P_{n-1}} \int_{1/n}^\pi | \phi(t) | \left(\frac{1}{n^2t^2} \right) dt$$

$$+ A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{(n+1)(\log n)^2} \int_{1/n}^\pi | \phi(t) | \left\{ \frac{1+\log 1/t}{t} \right\} dt$$

$$+ A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{\log n} \int_{1/n}^\pi | \phi(t) | \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{P_{n-1}}{(n+1)P_n} \right\} dt$$

$= I_{4\cdot1}(n) + I_{4\cdot2}(n) + I_{4\cdot3}(n)$, माना

$$I_{4\cdot1}(n) \leqslant A \sum_2^\infty \frac{(\log n)^\alpha}{n^2P_{n-1}} \int_{1/n}^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} \, dt$$

$$\leqslant A \sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1-\alpha}} \int_{1/n}^\pi \frac{dt}{t(\log 1/t)^{1+\alpha+\epsilon}}$$

$$=0(1). \tag{3.4}$$

$$I_{4\cdot2}(n) \leqslant A \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log n)^{2-\alpha}} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t} (1+\log 1/t)dt$$

$$\leqslant A \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log n)^{2-\alpha}} \int_{1/n}^{\pi} \frac{(1+\log 1/t)dt}{t(\log 1/t)^{1+\alpha+\epsilon}}$$

$$=0(1). \tag{3.5}$$

आगे भी हम देखते हैं कि

$$I_{4\cdot3}(n) \leqslant A \sum_{2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^2 (\log n)^2} \int_{1/n}^{\pi} |\phi(t)|dt$$

$$\leqslant A \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\log n)^{2-\alpha}} \int_{1/n}^{\pi} \omega(t)dt$$

$$\leqslant A \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{2+\epsilon}}$$

$$=0(1). \tag{3.6}$$

अन्त में हम निम्न पर विचार करेंगे

$$\sum_{2}^{\infty} I_1(n) = \sum_{2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{P_{n-1}} \left| \int_0^{\pi} \phi(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (n-k)t}{k+1} \right) dt \right|$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{P_{n-1}} \left| \int_0^{\pi} \phi(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos nt \cos kt}{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin nt \sin kt}{k+1} \right) dt \right|$$

$$\leqslant \sum_{2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{P_{n-1}} \left| \int_0^{\pi} \phi(t)\, \alpha(t) \cos nt\, dt \right|$$

$$+ \sum_{2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{P_{n-1}} \left| \int_0^{\pi} \phi(t)\, \beta(t) \sin nt\, dt \right|$$

$$= \sum_{2}^{\infty} (\log n)^{\alpha} \frac{|\alpha(n)| + |\beta(n)|}{P_{n-1}}.$$

(3.1) को सिद्ध करने के लिए इतना प्रदर्शित करना पर्याप्त है कि

$$\sum_{2}^{\infty} (\log n)^{\alpha} \frac{|\alpha(n)| + |\beta(n)|}{\log n} < \infty. \tag{3.7}$$

वार्ष्णेय[3] का अनुगमन करने एवं पार्सेवाल प्रमेय को व्यवहृत करने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)^2 \sin^2 (nh) = A\int_0^{\pi} \{a(t+h)\}^2 . \{\phi(t+h)-\phi(t-h)\}^2 dt$$

$$+A\int_0^{\pi} \{\phi(t+h)\}^2 . \{a(t+h)-a(t-h)\}^2 dt$$

$$= J_1(h)+J_2(h), \text{ माना}$$

वार्ष्णेय[3] की ही भाँति अग्रसर होने पर

$$J_2(h)=0\left(\frac{h}{(\log 1/h)^{2(\alpha+\epsilon)}}\right) \tag{3.8}$$

$$h=\frac{\pi}{2N} \text{ मानते हुए}$$

$$J_2(h)=0\left(\frac{1}{N(\log N)^{2(1+\alpha+\epsilon)}}\right) \tag{3.9}$$

इसी प्रकार

$$J_1(h)=0\left(\frac{1}{N(\log N)^{(1+\alpha+\epsilon)}}\right). \tag{3.10}$$

(3.9) तथा (3.10) को संयुक्त करने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^2(n) \sin^2 nh = \frac{A}{N(\log N)^{1+\alpha+\epsilon}} + \frac{A}{N(\log N)^{2(\alpha+\epsilon)}} \tag{3.11}$$

और आगे

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ n=2+1}}^{2^{\nu}} a^2(n) \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^2(n) \sin^2 (nh)$$

$$\leqslant \frac{A}{N(\log N)^{1+\alpha+\epsilon}} + \frac{A}{N(\log N)^{2(\alpha+\epsilon)}} \tag{3.12}$$

आगे भी

$$\left\{ \sum_{\substack{\nu-1 \\ n=2+1}}^{2^{\nu}} (\log n)^{2\alpha-2} \right\}^{1/2} = 0\{2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1}\}. \tag{3.13}$$

श्वार्ज की असमिका को व्यवहृत करने पर (3.12) तथा (3.13) की सहायता से हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा

$$\sum_{\substack{\nu-1 \\ n=2+1}}^{2^{\nu}} (\log n)^{\alpha-1}(a(n) \sin nh) \leqslant \left\{ \sum_{\substack{\nu-1 \\ n=2+1}}^{2^{\nu}} a^2(n) \sin^2 nh \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} (\log n)^{2\alpha-2} \right\}^{1/2}$$

$$\leqslant A \left[\frac{1}{N (\log N)^{1+\alpha+\epsilon}} + \frac{1}{N (\log N)^{2(\alpha+\epsilon)}}\right]^{1/2} . \, 0(2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1})$$

$$\leqslant A \left[\left(\frac{1}{N (\log N)^{1+\alpha+\epsilon}}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{N (\log N)^{2(\alpha+\epsilon)}}\right)^{1/2}\right] . \, 0(2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1})$$

$=K_1+K_2$, माना

$N=2^\nu$ लेने पर

$$K_1=0\left(\frac{1}{2^\nu(\log 2^\nu)^{1+\alpha+\epsilon}}\right)^{1/2}(2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1})$$

$$\leqslant 0\left(\frac{1}{2^{\nu/2} . \nu^{(1+\alpha+\epsilon)/2}}\right) . (2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1})$$

$$\leqslant 0\left(\frac{1}{\nu^{(3+\epsilon-\alpha)/2}}\right).$$

तथा

$$K_2=0\left(\frac{1}{2^\nu(\log 2^\nu)^{2(\alpha+\epsilon)}}\right)^{1/2} . (2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1})$$

$$\leqslant 0\left(\frac{1}{2^{\nu/2} . \nu^{(\alpha+\epsilon)}} . 2^{\nu/2} . \nu^{\alpha-1}\right)$$

$$\leqslant \frac{A}{\nu^{1+\epsilon}}.$$

β_n के लिए भी ऐसा ही सम्बन्ध मिलता है।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{P_{n-1}} \leqslant A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^\alpha |\alpha_n|}{\log n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^\alpha |\beta_n|}{\log n}$$

$$=A \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} (\log n)^{\alpha-1} |\alpha_n| + A \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} (\log n)^{\alpha-1} |\beta_n|$$

$$\leqslant A \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{3/2+\epsilon/2-\alpha/2}} + A \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\epsilon}}$$

$$=0(1).$$

इससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

निर्देश

1. मैकफैडेन, एल०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1942, **9**, 168-207

2. रीज, एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1924, **22**, 412-419

3. वार्ष्णेय, ओ० पी०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1960, **11**, 588-595

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 211-216

अर्ध-अनन्त सिलिंडर में, जिसके भीतर गतिमान उष्मा स्रोत हो, उष्मा का संचालन

श्रीमती सीता हंडा

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—सितम्बर 4, 1979]

सारांश

इस प्रपत्र में सिलिंडर के भीटर ताप के वितरण का अध्ययन, जब उष्मा स्रोत उसीके भीतर हो, किया गया है। सीमांत मान समस्या का हल समाकल परिवर्तों के सम्प्रयोग द्वारा प्राप्त किया गया है।

Abstract

Conduction of heat in a semi-infinite cylinder with a moving source of heat within it. *By* S. Handa, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we shall consider the distribution of temperature in a cylinder defined by $0 \leqslant r \leqslant a$, $z \geqslant 0$ with radiation at the face $z=0$ and $r=a$ into a medium at constant temperature and having a source of heat within it. We shall first take source of heat as an arbitrary function of r, z, t say $\psi(r,z,t)$. Next as a special case we shall consider a moving source of heat whose position at any instant t is given by z=vt and the source itself at that instant is expressed as $\delta(z-vt)$ wherein δ stands for the well known Dirac-Delta function. Certain other interesting special cases of the boundary value problem have also been discussed.

The solution of the boundary value problem considered here has been obtained by the application of the powerful tool of the integral transforms. A boundary value problem studied earlier by Mathur [1] follows as a special case of the problem solved here.

इस प्रपत्र में विचारणीय सीमांत मान समस्या को हल करने के लिए नीचे दिए गये समाकल परिवर्तों एवं उनके संगत प्रतिलोम सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी।

(i) सान्त हैंकेल परिवर्त [2, p. 83] जिसे निम्नलिखित समाकल समीकरण के द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$\tilde{f}_j(\xi_i)=\int_0^a r\,f(r)J_0(r\xi_i)dr \tag{1.1}$$

जहाँ ξ_i अबीजीय समीकरण का मूल है

$$h_1J_0(a\xi_i)-\xi_iJ_1(a\xi_i)=0 \tag{1.2}$$

और इसके प्रतिलोमन सूत्र [2, p. 84] को

$$f(r)=\frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\xi^2{}_i\tilde{f}_j(\xi_i)\,J_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_1)\,[J_0(a\xi_i)]^2} \tag{1.3}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ (2.2) के समस्त धन मूलों का योगफल लिया गया है।

(ii) विख्यात लैप्लास परिवर्त [2, p. 30] जिसे

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx. \tag{1.4}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं तथा इसका संवलन गुण (जो निम्न प्रकार है)

यदि $$L\{f_1(x)\,;p\}=\phi_1(p) \tag{1.5}$$

तथा $$L\{f_2(x);p\}=\phi_2(p) \tag{1.6}$$

तो $$\phi_1(p)\phi_2(p)=L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} \tag{1.7}$$

(iii) स्नेडान [2, *p*. 173-174] द्वारा विचार किया गया परिवर्त

यदि $$\tilde{f}(\eta)=\int_0^\infty f(z)K(\eta,z)\,dz \tag{1.8}$$

तो $$f(z)=\int_0^\infty \tilde{f}(\eta)K(\eta,z)d\eta \tag{1.9}$$

जहाँ $$K(\eta,z)=(2/\pi)^{1/2}\left[\frac{h\sin(\eta z)+\eta\cos(\eta z)}{(h^2+\eta^2)^{1/2}}\right] \tag{1.10}$$

2. वांछित फल

इस प्रपत्र में विचारणीय सीमांत मान समस्या के हल के लिए निम्नलिखित फलों [2, *p* 531; *p*. 89(69), *p*. 174] की भी आवश्यकता पड़ेगी :

(i)
$$\int_0^a rJ_0(r\xi_i)dr=\frac{a}{\xi_i}J_1(a\xi_i) \tag{2.1}$$

(ii)
$$\int_0^a x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)J_0(x\xi_i)\,dx$$

$$=aJ_0(a\xi_i)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+h_1 f\right]_{x=a}-\xi^2_i\bar{f}_j(\xi_i) \tag{2.2}$$

जहाँ ξ_i (2.2) का मूल है।

(iii)
$$\int_0^\infty \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}K(\eta,x)dx$$

$$=\frac{\eta}{(h^2+\eta^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+h\phi\right)_{x=0}-\eta^2\phi_s(\eta) \tag{2.3}$$

जहाँ $K(\eta,x)$ को (1.10) द्वारा परिभाषित करते हैं।

3. समस्या का सूत्रीकरण एवं हल

इस प्रकार के सिलिंडर में उष्मा के संचालन को नियन्त्रित करने वाले मूलभूत समीकरण को

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=k_1\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+\psi(r,z,t) \tag{3.1}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $k_1=\frac{k}{\rho c}$ (k सिलिंडर के पदार्थ की तापज संचालकता है, ρ इसका घनत्व है और c इसकी विशिष्ट उष्मा है—ये सभी अचर हैं) समस्या की परिसीमा दशायें हैं

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}+h_1\theta=0,\ r=a,\ z>0,\ t>0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}+h\theta=0,\ 0<r<a,\ z=0,\ t>0 \tag{3.3}$$

$$\theta(r,z,0)=f(r,z),\ 0<r<a,\ z>0,\ t=0 \tag{3.4}$$

ध्यान देने योग्य है कि सीमांत मान समस्या, जो (3.1) द्वारा अंकित की जाती है, परिवर्तित परिसीमा प्रतिबन्धों से प्रभावित है,

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}+h_1(\theta-\theta_1)=0,\ r=a,\ z>0,\ t>0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}+h(\theta-\theta_1)=0,\ 0<r<a,\ z=0,\ t>0,$$

$$\theta(r,z,0)-\theta_1=f(r,z),\ 0<r<a,\ z>0,\ t=0$$

वह सीमांत मान समस्या (3.1) में समानीत हो जाती है जो प्रतिबन्ध (3.2) (3.3) (3.4) के अधीन है और उपर्युक्त प्रतिबन्धों में $\theta-\theta_1=(H)$ रखने से प्राप्त होती है। (3.1) में फलन $\psi(r,z,t)$ की प्रकृति तथा (3.4) में $f(r,z)$ की प्रकृति सदैव इस रूप में ली जाती है कि सीमांत मान समस्या के हल के दौरान लिऐ गए उनके अनुकूल समाकल परिवर्तों का अस्तित्व हो।

उपर्युक्त सीमांत मान समस्या को हल करने के लिए हम आंशिक अवकल समीकरण (3.1) के दोनों पक्षों में $rJ_0(r\xi_i)$ से गुणा करते हैं और 0 से a की सीमाओं के मध्य r के प्रति समाकलित करते हैं। अब फल (2.2) तथा परिसीमा दशा (3.2) का उपयोग करके हम

$$\frac{\partial\bar{\theta}j}{\partial t}=k_1\left(-\xi^2{}_i\bar{\theta}j+\frac{\partial^2\bar{\theta}j}{\partial z^2}\right)+\bar{\Psi}j(\xi_i,z,t) \tag{3.5}$$

प्राप्त करते हैं जहाँ

$$\bar{\theta}j=\bar{\theta}j(\xi_i,z,t)=\int_0^a r\ \theta(r,z,t)J_0(r\xi_i)dr, \tag{3.6}$$

तथा

$$\bar{\Psi}j(\xi_i,\ z,t)=\int_0^a r\psi(r,z,t)J_0(r\xi_i)dr. \tag{3.7}$$

अब (3.5) को एक साधारण अवकल समीकरण में रूपान्तर करने के लिए (3.5) के दोनों पक्षों में $K(\eta,z)$ से गुणा करते हैं, z के प्रति 0 से ∞ तक समाकलित करते हैं, फल (2.3) का उपयोग परिसीमा दशा (3.3) के अनुसार करते हैं और

$$\frac{d\bar{\theta}_s}{dt}+k_1(\xi^2{}_i+\eta^2)\bar{\theta}_s=\bar{\Psi}_s(\xi_i,\eta,t) \tag{3.8}$$

प्राप्त करते हैं जहाँ

$$\bar{\theta}_s(\xi_i\eta,t)=\bar{\theta}_s=\int_0^\infty\bar{\theta}j(\xi_i,z,t)K(\eta,z)dz \tag{3.9}$$

तथा

$$\bar{\Psi}_s(\xi_i,\eta,t)=\int_0^\infty\bar{\Psi}j(\xi_i,z,t)\ K(\eta,z)dz \tag{3.10}$$

पुनः अवकल समीकरण (3.8) को हल करने के लिए हम (1.4) द्वारा परिभाषित लैप्लास परिवर्त का उपयोग करते हैं। (3.8) के दोनों पक्षों का लैप्लास परिवर्त लेने पर एवं प्रारम्भिक दशा (3.4) पर विचार करने पर हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$L\{\bar{\theta}_s\}=\frac{1}{p+k_1\text{B}}\ \bar{f}_s(\xi_i,\eta)+\frac{1}{p+k_1B}L\{\bar{\Psi}_s(\xi_i,\eta,t)\} \tag{3.11}$$

जहाँ

$$\bar{f}_s(\xi_i,\eta)=\int_0^\infty\left\{\int_0^a rf(r,z)J_0(\xi_i r)dr\right\}K(\eta,z)dz \tag{3.12}$$

तथा

$$B=\xi^2{}_i+\eta^2 \tag{3.13}$$

(3.11) का प्रतिलोम लैप्लास परिवर्त निकालने पर (1.7) के बल पर हमें

$$\bar{\theta}_s=\bar{f}_s(\xi_i,\eta)e^{-k_1 Bt}+\int_0^t\bar{\psi}_s(\xi_i,\eta,\tau)e^{-k_1 B(t-\tau)}d\tau \tag{3.14}$$

प्राप्त होता है।

अब क्रमशः प्रतिलोम प्रमेय (1.9) तथा (1.3) को व्यवहृत करने पर सीमांत मान समस्या के हल के रूप में निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\theta(r,z,t)=\frac{2}{a^2}\sum_i\frac{\xi^2{}_iJ_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_i)\,[J_0(a\xi_i)]^2}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-k_1 Bt}K(\eta,z)\,[\bar{f}_s(\xi_i\eta)$$

$$+\int_0^\infty\bar{\psi}_s(\xi_i,\eta,\tau)e^{k_1 Bt}d\tau]d\eta \tag{3.15}$$

4. विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि (3.1) में $\psi(r,z,t)=A(r)\delta(z-vt)$ लें तो (3.15) का $\bar{\psi}_s(\xi_i,\eta,\tau)$ ज्ञात फल[2] के $\bar{A}_j(\xi_i)K(\eta,v\tau)$ में समानीत हो जाता है तथा सीमांत मान समस्या निम्नलिखित रूप धारण कर लेती है।

$$\theta(r,z,t)=\frac{2}{a^2}\sum_i\frac{\xi^2{}_iJ_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_i)\,[J_0(a\xi_i)]^2}\times\int_0^\infty K(\eta,z)e^{-k1Bt}[\bar{f}_s(\xi_i,\eta)$$

$$+\bar{A}_j(\xi_i)\{\int_0^t K(\eta,v\tau)e^{k1B\tau}dt\}d\eta \tag{4.1}$$

जहाँ

$$\bar{A}_j(\xi_i)=\int_0^a rA(r)J_0(r\xi_i)dr \tag{4.2}$$

तथा B (3.13) द्वारा परिभाषित होता है।

(4.1) में आए τ समाकल का मान ज्ञात करने पर थोड़े से सरलीकरण पर यह निम्नलिखित रूप में समानीत हो जाता है।

$$\theta(r,z,t)=\frac{2}{a^2}\sum_i\frac{\xi^2{}_iJ_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_i)\,[J_0(a\xi_i)]^2}\times\int_0^\infty K(\eta,z)\,[\bar{f}_s(\xi_i,\eta)e^{-k1Bt}$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(h^2+\eta^2)^{1/2}} \frac{\bar{A}j(\xi_i)}{\eta^2 v^2+k^2{}_1 B^2} \times \{(k_1 Bh+\eta^2 v) \sin(\eta vt)$$

$$+(k_1 B\eta-\eta vh) \cos(\eta vt)+\eta v(h-\eta)e^{-k1Bt}\}]d\eta \quad (4.3)$$

(ii) यदि हम (4.3) में $h \to \infty$ मान लें तो संगत सीमांत मान समस्या से निम्नलिखित परिणाम मिलेगा :

$$\theta(r,z,t)=\frac{2}{a^2} \sum_i \frac{\xi^2{}_i J_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_1)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \sin \eta z[\bar{f}_s(\xi_i,\eta)e^{-k_1 Bt}$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\bar{A}j(\xi_i)}{\eta^2 v^2+k^2{}_1 B^2} \{k_1 B \sin \eta vt-\eta v \cos(\eta vt)+\eta v e^{-k1Bt}\}d\eta] \quad (4.4)$$

(iii) यदि हम $f(r,z)=\lambda e^{-z}$, $\psi(r,z,t)=0$ (4.1) में $h \to \infty$ लें तो संगत सीमांत मान समस्या का हल, जो (4.4) द्वारा किया जाता है माथुर [1,p.54(1.9.1) द्वारा दिये गये निम्नांकित फल में समानीत हो जाता है।

$$\theta(r,z,t)=\frac{4}{\pi a^2} \sum_i \frac{\xi^2{}_i J_0(r\xi_i)}{(h^2{}_1+\xi^2{}_1)\,[J_0(a\xi_i)]^2} \int_0^\infty \sin(\eta z)\left[\int_0^\infty e^{-z}\sin(\eta z)\,dz\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_0^a rJ_0(r\xi_i)dr\right\}\right]d\eta \quad (4.5)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका इंजीनियरी कालेज, जयपुर के डॉ० के० सी० गुप्ता की कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. माथुर, एस०एल०, **पी०-एच० डी० थीसिस,** राजस्थान विश्वविद्यालय, 1974
2. स्नेडान, आई० एन०, Fourier Transforms. मकग्राहिल, न्यूयार्क, 1951

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 217-232

H-फलन वाले नवीन आवर्तन सम्बन्ध

जी० पी० गौतम तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जून 15, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फाक्स के H-फलन वाले कई नवीन आवर्तन सम्बन्ध प्राप्त किए गए हैं।

Abstract

New recurrence relations involving H-function. *By* G.P. Gautam and A.N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have given a number of new recurrence relations involving Fox H-function.

1. प्रस्तावना

फाक्स का H-फलन[2] निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$$H^{m,n}_{p,q}\left[x \;\middle|\; \begin{matrix} ((a_p, e_p)) \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix}\right] = H(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + e_j s)}{\prod_{j=1+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + f_j s) \prod_{j=1+u}^{p} \Gamma(a_j - e_j s)} x^s ds \tag{1.1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया जाता है, $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$ तथा समाकलन L का पथ अपने लूपों सहित s-तल में $-i\infty$ से $+i\infty$ तक इस प्रकार फैला रहता है कि आवश्यकता पड़े तो $\Gamma(b_j - f_j s), j=1, 2, \ldots m$ के पोल L के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_j s), j=1, 2, \ldots, n$ के पोल बाईं ओर अवस्थित होते हैं। (1.1) में समाकल निम्नलिखित में से कम से कम एक दशा में अभिसारी होता है।

(a) $w_1 > 0, \mid \arg x \mid < \frac{1}{2} w_1 \pi$

(b) $w_2 \geqslant 0, \mid \arg x \mid < \frac{1}{2} w_2 \pi$ तथा $R(w_2+1)<0$ (1.2)

जहाँ

$$w_1 = \sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=u+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=l+1}^{q} f_j$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(p-q) + \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j$$

तथा $((a_p, e_p))$ से अनुक्रम $(a_1, e_1), (a_2, e_2), \ldots, (a_p, e_p)$; $(a_{2,p}, e_{2,p})$ से अनुक्रम $(a_2, e_2), \ldots, (a_p, e_p)$ का प्रदर्शन होता है।

2. ज्ञात फल

हमें ओल्खा तथा राठी[4] के निम्नलिखित फल की आवश्यकता होती है

$$\int_0^\infty x^{s-1} \, {}^{\mu,\mu'}_{\nu,\nu'}\tilde{w}_\lambda(x)dx \tag{2.1}$$

$$= \frac{2^{2s-1-\lambda}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu'}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{\mu s}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{4}\right)\Gamma\left(1+\nu'-\frac{\mu' s}{2}-\frac{\mu'\nu'}{2}+\frac{\mu'\lambda}{2}-\frac{\mu'}{4}\right)}$$

जो

$$R\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)>0,\ R\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu'}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)>0,\ R(\mu\ ,\mu')>0$$

के लिए वैध है जहाँ

$$\underset{\nu,\nu'}{\overset{\mu,\mu'}{}}\tilde{w}_\lambda(x)=x^{1/2}\int_0^\infty t^{\lambda-1}\,{}^{\mu}_{\nu}j\,(xt)\,{}^{\mu'}_{\mu'}j\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

तथा ${}^{\mu}_{\nu}J(x)$ राइट[5] का सार्वीकृत वेसेल फलन है जिसे श्रेणी

$${}^{\mu}_{\nu}J(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}/\{r!\,(1+\nu+\mu_r)\},\ \mu>0.$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। आल्खा तथा राठी[4] के (2.1) से (2.8) समीकरणों तक को पुनः लिखने पर

$$\left[{}^{\mu,1}_{\mu,0}\tilde{w}_\lambda(x)+2\sum_{i=1}^{\infty}{}^{\mu,1}_{\nu,2i}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=\frac{x^{-\lambda}2^{\lambda-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)} \tag{2.2}$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu)>0.$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}i^2\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}=\frac{x^{2-\lambda}2^{\lambda-3}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Gamma\left(1+\nu+\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)} \tag{2.3}$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-2)>0.$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i-1}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}=\frac{x^{1-\lambda}2^{\lambda-3}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)} \tag{2.4}$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0.$

$$\left[{}^{\mu,1}_{\nu,0}\tilde{w}_\lambda(x)+2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=\pi^{1/2}2^{-\lambda-1}H^{2,0}_{0,4}\left[\frac{x^2}{16}\,\middle|\,\left(\frac{\nu}{2},1\right),\left(-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(-\nu+\frac{\mu\nu}{x},\mu\right)\right] \tag{2.5}$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0.$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i-1}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=\pi^{1/2}2^{-\lambda-1}H^{2,0}_{0,4}\left[\frac{x^2}{16}\,\middle|\,\left(\frac{\nu}{2},1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(-\nu+\frac{\mu\nu}{2},\mu\right)\right] \quad (2.6)$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0.$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(2i-1)\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i-1}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=2^{-\lambda-1}H^{2,0}_{0,4}\left[\frac{x^2}{16}\,\middle|\,\left(\frac{\nu}{2},1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2},1\right),\left(-\nu+\frac{\mu\nu}{2},\mu\right)\right] \quad (2.7)$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R\left(\lambda+\nu-\frac{3}{2}\right)>0.$

$$\left[{}^{\mu,1}_{\nu,1}\tilde{w}_\lambda(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(2i+1)^3\,{}^{\mu,1}_{\nu,3i}w(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=\frac{x^{1-\lambda}2^{\lambda-3}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}\right)}+\frac{x^{3-\lambda}2^{\lambda-5}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu+\frac{3\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}\right)} \quad (2.8)$$

जहाँ (a) $R(\lambda+\nu-3)>0$ जब $0<\mu<1$

(b) $R(\lambda+\nu-3)>0,\ R\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)<0$ जब $\mu=1$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}2i(2i+1)(2i+2)\,{}^{\mu,1}_{\nu,2i+1}\tilde{w}_\lambda(x)\right]x^{-1/2}$$

$$=\frac{x^{3-\lambda}2^{\lambda-5}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu+\frac{3\mu}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)} \quad (2.9)$$

जहाँ (a) $R(\lambda+\nu-3)>0$ जब $0<\mu<1$

(b) $R(\lambda+\nu-3)>0,\ R\left(\lambda-\frac{7}{2}\right)<0$ जब $\mu=1$

$$\int_0^\infty x^{M\cdot s-1}\ {}^{\mu,\mu'}_{\nu,\nu'}\tilde{w}_\lambda(x) H^{m,n}_{p,q}\left[x^{2\sigma}K \,\middle|\, \begin{matrix}((a_p,\epsilon_p))\\((b_q,f_q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=2^{2s+2M-\lambda-1}$$

$$H^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16^\sigma K \,\middle|\, \begin{matrix}\left(\frac{3}{4}-\frac{M}{2}-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(\frac{3}{4}-\frac{M}{2}-\frac{s}{2}-\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right)\\((a_p,e_p)),\left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu s}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{4},\mu\sigma\right)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\left(1+\nu'-\frac{\mu' M}{2}-\frac{\mu' s}{2}-\frac{\mu'\nu'}{2}+\frac{\mu'\lambda}{2}-\frac{\mu'}{4},\mu'\sigma\right);\\((b_q,f_q))\end{matrix}\right] \qquad (2.10)$$

जहाँ $R\left(\frac{M}{2}+\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+\frac{s}{2}+\frac{\nu'}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)>0$

$R(\mu,\mu')>0$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1.2) ।

(2.10) की उपपत्ति

(2.10) के वाम पक्ष के H-फलन को (1.1) की सहायता से कंटूर रूप में व्यक्त करने, समाकलन के क्रम को बदलने से जो कि समाकल में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध हैं, (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालने और (1.1) की सहायता से पुनः विवेचना करने (2.10) का वाम पक्ष तुरन्त प्राप्त होता है ।

3. आवर्तन सम्बन्ध

$$H^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16^\sigma K \,\middle|\, \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right)\\((a_p,e_p)),\left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\mu\sigma\right),\\\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right)\\((b_q,f_q))\end{matrix}\right]$$

$$
+2\sum_{i=1}^{\infty} H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K \left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(\frac{1}{2}-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right), \\ ((a_p,e_p)),\left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\mu\sigma\right) \\ \left(\frac{1}{2}+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right): \\ ((b_q,f_q)) \end{array}\right.\right]
$$

$$
=\frac{4^{\lambda-M-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)K^{(\lambda-M-1/2)}}{\sigma\,\Gamma\left(1+\nu-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)}
$$

$$
\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\frac{M-\lambda+1}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(1-a_j-e_j\frac{M-\lambda+1}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\frac{M-\lambda+1}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\frac{M-\lambda+1}{2\sigma}\right)} \tag{3.1}
$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu)>0,\ \sum_1^p e_j\leqslant\sum_1^q f_j,$

$$
-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right)<R\left(\frac{M-\lambda+1}{2\sigma}\right)<\frac{1}{e_j}-\max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right),
$$

$$
R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)>0 \text{ यदि } i=0,1,2,3,\ldots
$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (2·1) ।

$$
\sum_{i=1}^{\infty} i^2 H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K \left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(\frac{1}{2}-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right) \\ ((a_p,e_p)),\left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{2},\mu\sigma\right) \\ \left(\frac{1}{2}+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right): \\ ((b_q,f_q)) \end{array}\right.\right]
$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-2}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu}{2}-1\right)K^{(\lambda-M-3)/2\sigma}}{\sigma\Gamma\left(1+\nu+\mu-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\,\frac{M-\lambda+3}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-e_j\,\frac{M-\lambda+3}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\,\frac{M-\lambda+3}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\,\frac{M-\lambda+3}{2\sigma}\right)} \tag{3.2}$$

जहाँ $\quad 0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-2)>0\ \sum_{1}^{p}e_j-\sum_{1}^{q}f_j\leqslant 0,$

$$-\min_{i\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right)<R\left(\frac{M-\lambda+3}{2\sigma}\right)<\frac{1}{e_j}-\max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right),$$

$$R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\quad R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)>0 \text{ यदि } i=1,2,3,\ldots$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1.2) ।

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\,H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K\,\middle|\,\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\\ \left(1-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right),((a_p,e_p)),\\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\mu\sigma\right),\left(i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right)\\ ((b_j,f_q))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)K^{(\lambda-M-2)/2\sigma}}{\sigma\,\Gamma\left(1+\nu+\frac{u}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu\nu}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-e_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)} \tag{3.3}$$

जहाँ $$0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0,\ \sum_{1}^{p} e_j \leqslant \sum_{1}^{q} f_j,$$

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right),$$

$$R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}\right)>0 \text{ यदि } i=1, 2, 3, \ldots$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1.2)।

$$H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K \left| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}, \sigma\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right) \\ ((a_p, e_p)), \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \mu\sigma\right) \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right): \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix}\right.\right]$$

$$+2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i H_{p+4,q}^{m,n+2}$$

$$\left[16^{\sigma}K \left| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}, \sigma\right), \left(\frac{1}{2}-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right) \\ ((a_p, e_p)), \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \mu\sigma\right), \\ \left(\frac{1}{2}+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right): \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\pi^{1/2}\, 4^{-M-1}}{\sigma K^{(M-1)/2\sigma}} H_{q,p+4}^{n+2,m}$$

$$\left[\frac{1}{16K^{1/\sigma}} \left| \begin{matrix} \left(\left(1-b_q-f_q\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{f_q}{\sigma}\right)\right), \left(\frac{\nu}{2}, 1\right), \left(-\frac{\lambda}{2}, 1\right) \\ \left(\left(1-a_p-e_p\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{e_p}{\sigma}\right)\right), \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, 1, \left(-\nu+\frac{\mu\nu}{2}, \mu\right) \end{matrix}\right.\right] \quad (3.4)$$

जहाँ $0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0,\ \sum_1^p e_j \leqslant \sum_1^q f_j,$

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M+1}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$$

$$R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)>0 \text{ यदि } i=0, 1, 2, 3, \ldots$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1·2)।

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\, H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma} K \left| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}, \sigma\right), \left(1-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right), ((a_p, e_p)), \\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \sigma\right), \left(i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right): \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\pi^{1/2}\, 4^{-M-1}}{\sigma K^{(M+1)/2\sigma}} H_{q,p+4}^{n+2,m}\left[\frac{1}{16K^{1/\sigma}} \left| \begin{matrix} \left(\left(1-b_q-f_q\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{f_q}{\sigma}\right)\right); \left(\frac{\nu}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, 1\right), \\ \left(\left(1-a_p-e_p\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{e_p}{\sigma}\right)\right), \left(-\frac{\lambda}{2}, 1\right), \left(-\nu+\frac{\mu\nu}{2}, \mu\right): \end{matrix}\right.\right] \tag{3.5}$$

जहाँ

$$0<\mu<1,\ R(\lambda+\nu-1)>0,\ \sum_1^p e_j \leqslant \sum_1^q f_j,$$

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M+1}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right),$$

$$R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}\right)>0 \text{ यदि } i=1, 2, 3, \ldots$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्धित (1.2)।

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}(2i-1) \; H^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16^{\sigma}K \left| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}, \sigma\right), \left(1-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right), ((a_p, e_p)), \\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \mu\sigma\right), \left(i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right) : ((b_q, f_q)) \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{4^{-M-1}}{\sigma K^{(M+1)/\sigma}} \; H^{n+2,m}_{q,p+4}\left[\frac{1}{16K^{1/\sigma}} \left| \begin{matrix} \left(\left(1-b_q-f_q\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{1}{\sigma} f_q\right)\right) : \left(\frac{\nu}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, 1\right) \\ \left(\left(1-a_p-e_p\frac{M+1}{2\sigma}, \frac{1}{\sigma} e_p\right)\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, 1\right), \left(-\nu+\frac{\mu\nu}{2}, \mu\right) \end{matrix} \right. \right] \quad (3.6)$$

जहाँ

$$0<\mu<1, \; R\left(\lambda+\nu-\frac{3}{2}\right)>0, \; \sum_{1}^{p} e_j \leqslant \sum_{1}^{q} f_j,$$

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M+1}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$$

$$R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0, \quad R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}\right)>0 \text{ जहाँ } i=1, 2, 3\ldots,$$

तथा अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1.2) ।

$$H^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16^{\sigma}K \left| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}, \sigma\right), \left(-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}, \sigma\right), ((a_p, e_p)), \\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \mu\sigma\right), \left(1-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\sigma, \right), \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix} \right. \right]$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(2i+1)^3 H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K \,\middle|\, \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right),((a_p,e_p))\\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\mu\sigma\right),\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right):((b_q,f_q))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)K^{(\lambda-M-2)/2\sigma}}{\sigma\,\Gamma\left(1+\nu+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu\lambda}{2}\right)}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-e_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\,\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right)}$$

$$+\frac{4^{\lambda-M-3}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{2}\right)K^{(\lambda-M-4)/2\sigma}}{\sigma\,\Gamma\left(1+\nu+\frac{3\mu}{3}-\frac{\mu\nu}{3}-\frac{\mu\lambda}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\,\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-e_j\,\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\,\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\,\frac{M-\lambda-4}{2\sigma}\right)} \quad (3.7)$$

जहाँ (a) $R(\lambda+\nu-3)>0$ जब $0<\mu<1$,

(b) $R(\lambda+\nu-3)>0,\ R\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)<0$ जब $\mu=1$,

(c) $\sum_{1}^{p} e_j \leqslant \sum_{1}^{q} f_j$,

(d) $-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M-\lambda+2}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$

(e) $-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} - \max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$

(f) $R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0,\ R\left(\frac{M}{2}+\frac{3i}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)>0$

यदि $i=0, 1, 2, \ldots$

तथा (g) अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1·2) ।

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2i(2i+1)(2i+2)\, H_{p+4,q}^{m,n+2}\left[16^{\sigma}K \,\middle|\, \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2},\sigma\right),\left(-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right),(a_p,e_p)),\\ \left(1+\nu-\frac{\mu M}{2}-\frac{\mu\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\sigma\right),\left(1+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2},\sigma\right),((b_q,f_q))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-3}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{2}\right)K^{(\lambda-M-4)2\sigma}}{\sigma\,\Gamma\left(1+\nu+\frac{3\mu}{2}-\frac{\mu\nu}{3}-\frac{\mu\lambda}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+f_j\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-e_j\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-f_j\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+e_j\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right)} \quad (3.8)$$

जहाँ (a) $R(\lambda+\nu-3)>0$ जब $0<\mu<1$

(b) $R(\lambda+\nu-3)>0,\ R\left(\lambda-\frac{7}{2}\right)<0$ जब $\mu=1$

(c) $\sum_{1}^{p} e_j \leqslant \sum_{1}^{q} f_j$

(d) $\underset{1\leqslant j\leqslant m}{-\min} \; R\left(\frac{b_j}{f_j}\right) < R\left(\frac{M-\lambda+4}{2\sigma}\right) < \frac{1}{e_j} \underset{1\leqslant j\leqslant n}{-\max} \; R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$

(e) $R\left(\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)>0, \; R\left(\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}+\frac{5}{4}\right)>0$

यदि $i=1, 2, \ldots$

तथा (f) अपने परिवर्धित रूपों सहित प्रतिबन्ध (1.2)।

3.1 से 3.8 तक की उपपत्ति

(2.2) से (2.9) तक को

$$2^{\lambda-2M} x^M \; H_{p,q}^{m,n}\left[Kx^{2\sigma}\left|\begin{matrix}((a_p, e_p))\\((b_q, f_q))\end{matrix}\right.\right]$$

से गुणा करते हैं और 0, ∞ सीमाओं के मध्य समाकलित करते हैं।

वाम पक्ष का मान निकालने के लिए (1.1) के द्वारा प्रत्येक पद में आगत H-फलन को कट्टर रूप में व्यक्त करते हैं, समाकलन के क्रम को बदलते हैं क्योंकि दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत यह वैध है। (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल ज्ञात करते हैं जिससे तुरन्त ही (3.1) से लेकर (3.8) तक के वाम पक्ष प्राप्त हो जाते हैं।

दक्षिण पक्षों को H-फलन के मेलिन परिवर्त का उपयोग करते हुए प्राप्त करते हैं[3] इससे। (3.1) से (3.8) तक के वाम पक्ष निकल आते हैं।

4. सम्प्रयोग

आवर्तन सम्बन्ध (3.1) की विशिष्ट दशाओं को प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित योजना बनाई जाती है :

यदि

$$e_p=f_q=\sigma=1, \; \mu=\frac{1}{\sigma} \tag{4.1}$$

तो हमें माइजर के H-फलन वाला आवर्तन सम्बन्ध प्राप्त होता है, अर्थात्

$$G^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16K\left|\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right),((a_p)),\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{M}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right),((b_q)),\end{matrix}\right.\right]$$

$$+2\sum_{i=1}^{r}G^{m,n+2}_{p+4,q}\left[16K\left|\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}-\frac{\nu}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right),((a_p)),\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{M}{2}\right),\left(\frac{1}{2}+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right):((b_q))\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)K^{(\lambda-M-1)/2}}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+\frac{M-\lambda+1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-\frac{M-\lambda+1}{2}\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-\frac{M-\lambda+1}{2}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+\frac{M-\lambda+1}{2}\right)}\tag{4.2}$$

(4.2) में m को 1, n को $(n-2)$, p को $p-4$ से प्रतिस्थापित करने और एर्डेल्यी[1] के फल

$$G^{1,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}((a_p))\\((b_q))\end{matrix}\right.\right]=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+b_1-a_j)x^{\mu'}}{\prod_{j=2}^{p}\Gamma(1+b_1-b_j)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_1)}$$

$$_pF_{q-1}\left(\begin{matrix}1+b_1-a_1,\ldots,1+b_1-a_p;\\1+b_1-b_2,\ldots,1+b_1-b_q;\end{matrix}-x\right)$$

का उपयोग करने पर जहाँ $p\leqslant q$

$$\frac{(16K)^{b_1}\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(1+b_1-a_j)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+b_1+\frac{M}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma(1+b_1-b_j)\prod_{j=n-1}^{p-4}\Gamma(a_j-b_1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{M}{2}-b_1\right)}$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b_1+\frac{M}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}-b_1\right)}\,{}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+b_1-a_1,\ \ldots,\ 1+b_1-a_{n-2},\\ b_1+\frac{1+M+\nu}{2},\ b_1+\frac{1+M-\lambda}{2},\ 1+b_1-a_{n-1},\\ \ldots,\ 1+b_1-a_{p-4},\\ 1+b_1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{M}{2}\right),\\ \frac{1}{2}+b_1+\frac{M}{2}-\frac{\lambda}{2}\ :\ 1+b_1-b_2,\ \ldots,\\ 1+b_1-b_q;\ -16K\end{matrix}\right]\right.$$

$$+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b_1+\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}-b_1\right)}$$

$$\left.{}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+b_1-a_1,\ \ldots,\ 1+b_1-n_{n-2},\ b_1+\frac{1+M+\nu}{2},\ \frac{1}{2}+b_1+\frac{M}{2}+i-\frac{\lambda}{2},\\ 1+b_1-a_{n-1},\ \ldots,\ 1+b_1-a_{p-4},\ 1+b_1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{M}{2}\right),\\ \frac{1}{2}+b-i+\frac{M}{2}-\frac{\lambda}{2}\ :\\ 1+b_1-b_2,\ \ldots,\ 1+b_1-b_q;\ -16K\end{matrix}\right]\right\}$$

$$=\frac{4^{\lambda-M-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)K^{(\lambda-M-1)/2}}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(b_1+\frac{M}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-a_j-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma\left(\frac{1}{2}-b_j-\frac{M}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)\prod_{j=n-1}^{p-4}\Gamma\left(a_j+\frac{M}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

जहाँ $p\leqslant q$.

इसी प्रकार (3.2) से (3.8) आवर्तन सम्बन्धों का सम्प्रयोग उनकी विशिष्ठ दशाओं को प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से प्रथम लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का कृतज्ञ है जिसने टीचर फेलोशिप प्रदान किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० , Tables of Integral Transform, 1953, भाग 2, मकग्राहिल, न्यूयार्क, पृष्ठ 408

2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 408

3. मथाई, ए०एम० तथा सक्सेना, आर०के० , The *H*-function with applications in : atistics and other disciplines, विले ईस्टर्न लिमिटेड, नई दिल्ली 1978, पृष्ठ 33 ,

4. ओल्खा, जी० एम० तथा राठी, पी० एन० , Revista Mathematica Y. Fisca Teorica 1969, XIX, (1: 2) 45.

5. राइट, ई०एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **38**, 257

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 233-239

बहुपदियों $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ का एक समुच्चय-II

अरुणा श्रीवास्तव तथा आर०सी० तोमर

गणित विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

[प्राप्त—जनवरी 27, 1979]

सारांश

इस प्रपत्र में x^n का प्रसार सार्वीकृत बहुपदियों $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के पदों में प्राप्त किया गया है। लेगेण्ड्र, हर्माइट तथा लागेर बहुपदियों के प्रसार भी $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के पदों में प्राप्त किए गए हैं।

Abstract

On a set of polynomials $G_n^{\lambda}(x, s, p)$-II. *By* Aruna Srivastava and R.C. Tomar, Department of Mathematics, University of Delhi.

In this paper we have obtained expansion of x^n in terms of generalized polynomials $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ and have also obtained expansions of Legendre, Hermite and Laguerre polynomials in terms of $G_n^{\lambda}(x, s, p)$.

1. भूमिका

अपने पिछले प्रपत्र[4] में हमने सार्वीकृत बहुपदियों $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के एक नवीन वर्ग का सूत्रपात किया है। बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है।

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p) \frac{t^n}{n!} = e^{pt}(1-t^s x)^{\lambda}, \tag{1.1}$$

जहाँ s धन पूर्णाङ्क है, दशा $p=s=1$ का अध्ययन प्रभाकर तथा सुमन[1,2] द्वारा हो चुका है।

यहाँ, हम पहले x^n के प्रसार को $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के पदों में ज्ञात करेंगे और फिर इसका उपयोग क्रमशः लेगेण्ड्र, हर्माइट तथा लागेर बहुपदियों के लिए श्रेणियाँ प्राप्त करने के लिए किया जावेगा।

2. x^n का प्रसार

हम x^n के प्रसार को $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के पदों में निम्न प्रकार से ज्ञात करेंगे,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k}\, n!\, G_k^{\lambda}(x, s, p)}{(ns-k)!\, k!\, (-\lambda)_n} \tag{2.1}$$

उपपत्ति

(1.1) में t के स्थान पर $t^{1/s}$ रखने पर

$$e^{pt^{1/s}}(1-tx)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p) \frac{t^{n/s}}{n!}$$

अथवा

$$(1-tx)^{\lambda} = e^{-pt^{1/s}} \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p) \frac{t^{n/s}}{n!}$$

अथवा

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)_n x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^n \quad G_k^{\lambda}(x, s, p)\, t^{(n+k)/s}}{k!\, n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^{n-k}\, G_k^{\lambda}(x, s, p)\, t^{n/s}}{(n-k)!\, k!},$$

जो दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को समतुलित करने पर (2.1) प्रदान करता है।

लेगेन्ड्र बहुपदियों का प्रसार

ज्ञात फल [3, p. 157]

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2})_{n-r} (2x)^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!}.$$

से हमें प्राप्त होगा :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2})_{n+r} 2^n t^{n+2r}}{r!\,n!} x^n.$$

(2·1) से x^n का मान रखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2})_{n+r} 2^n}{n!\,r!} \times$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k}\, n!\, \overset{\lambda}{G_k} (x, s, p)\, t^{n+2r}}{(ns-k)!\, k!\, (-\lambda)_n}$$

$$= \sum_{r,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+ns-k} p^{ns-k} (\frac{1}{2})_{n+r} 2^n \;\overset{\lambda}{G_k} (x, s, p)}{r!\,(ns-k)!\,k!\,(-\lambda)_n} t^{n+2r}$$

$$= \sum_{r,n,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+k)s+r-k}\, p^{(n+k)s-k} (\frac{1}{2})_{n+k+r} 2^{n+k} \overset{\lambda}{G_k} (x, s, p)}{r!\,((n+k)s-k)!\,k!\,(-\lambda)_{n+k}} t^{n+k+2r}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{(n-2r)s+ks+r-k} p^{(n-2r)s+ks-k} (\frac{1}{2})}{r!\,((n)2r)s+ks-k)!\,k!\,(-\lambda)_{n-2r+k}} n+k-r$$

$$\times 2^{n+k-2r}\, \overset{\lambda}{G_k} (x, s, p) t^{n+k}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ns+ks-k} p^{ns+ks-k} 2^{n+k}}{k!} \overset{\lambda}{G_k} (x, s, p) t^{n+k}$$

$$\times \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^{r(1-2s)} (2p^s)^{-2r} (\frac{1}{2})_{n+k-r}}{r!\,(ns+ks-k-2rs)!\,(-\lambda)_{n+k-2r}}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-p)^{ns+ks-k} (\frac{1}{2})_{n+k} 2^{n+k}}{k!\,(-\lambda)_{n+k}((n+k)s-k)!}$$

$$\times {}_{2s+2}F_1 \left[\begin{matrix} \Delta(2s,\ -(n+k)s+k),\ \frac{1+\lambda-n-k}{2},\ \frac{2+\lambda-n-k}{2} \\ ;\ \left(\frac{2s}{p}\right)^{2s} \\ \frac{1}{2}-n-k \end{matrix} \right]$$

$$\times G_k^{\lambda}(x, s, p) t^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^{ns-k}(\frac{1}{2})_n 2^n}{k!\,(-\lambda)_n (ns-k)!} G_k^{\lambda}(x, s, p) t^n$$

$$\times {}_{2s+2}F_1 \left[\begin{matrix} \Delta(2s,\ -ns+k),\ \frac{1+\lambda-n}{2},\ \frac{2+\lambda-n}{2} \\ ;\ \left(\frac{2s}{p}\right)^{2s} \\ \frac{1}{2}-n \end{matrix} \right]$$

दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को समतुलित करने पर

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k}(\frac{1}{2})_n 2^n}{k!\,(-\lambda)_n (ns-k)!} G_k^{\lambda}(x, s, p)$$

$$\times {}_{2s+2}F_1 \left[\begin{matrix} \Delta(2s;\ -ns+k),\ \frac{1+\lambda-n}{2}\ \ \frac{2+\lambda-n}{2} \\ ;\ \left(\frac{2s}{p}\right)^{2s} \\ \frac{1}{2}-n \end{matrix} \right] \qquad (2.2)$$

यदि हम (2.2) में $s=p=1$ रखें तो हमें प्रभाकर तथा सुमन[2] का ज्ञात फल प्राप्त होगा।

हर्माइट बहुपदियों का प्रसार

हमें ज्ञात है [3. p. 187] कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}$$

$$= \sum_{n,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2x)^n t^{n+2r}}{n!\, r!}$$

$$= \sum_{n,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^n}{n!\, r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^{ns-k}\, n!\, \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p)}{(ns-k)!\, k!\, (-\lambda)_n}\, t^{n+2r},$$

[(2.1)]. के प्रयोग से

$$= \sum_{n,r,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r(n+k)s-k} 2^{n+k} p^{(n+k)s-k}}{((n+k)s-k)!\, r!\, k!\, (-\lambda)_{n+k}} \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p) t^{n+k+2r}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-p)^{(n+k)s-k} 2^{n+k}}{k!} \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p) t^{n+k}$$

$$\times \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{r(1-2s)} (2p^s)^{-2r}}{r!\, (-\lambda)_{n+k-2r} (ns+ks-k-2rs)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k} 2^n t^n}{k!} \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p)$$

$$\times \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{r(1-2s)} (2p^s)^{-2r}}{r!\, (-\lambda)_{n-2r} (ns-k-2rs)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k} 2^n\ \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p)}{(-\lambda)_n (ns-k)!\, k!}\, t^n$$

$${}_{2s+2}F_0 \left[\frac{1+\lambda-n}{2}, \frac{2+\lambda-n}{2}, \triangle(-ns+k, 2s);\ -;\ -\left(\frac{2s}{p}\right)^{2s}\right].$$

t^n के गुणांकों को समतुलित करने पर

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-p)^{ns-k} 2^n \overset{\lambda}{G_k}(x, s, p)}{(-\lambda)_n (ns-k)!\, k!}$$

$$\times {}_{2s+2}F_0 \left[\frac{1+\lambda-n}{2}, \frac{2+\lambda-n}{2}, \triangle(-ns+k, 2s);\ -;\left(\frac{2s}{p}\right)^{2s}\right]. \quad (2.3)$$

लागेर बहुपदियों का प्रसार

ज्ञात फल [3, p. 203]

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(1+\alpha)_n x^k}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k}$$

से प्रारम्भ करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{\alpha}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+\alpha)_{n+k}\,x^k\,t^{n+k}}{k!\,n!\,(1+\alpha)_k\,(1+\alpha)_{n+k}}$$

$$=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{n+k}\,x^k}{k!\,n!\,(1+\alpha)_k}.$$

(2.1) की सहायता से दक्षिण पक्ष को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{n+k}}{k!\,n!\,(1+\alpha)_k}\sum_{r=0}^{k}\frac{(-p)^{ks-r}\,k!\,G_r^{\lambda}(x,s,p)}{(ks-r)!\,r!\,(-\lambda)_k}$$

$$=\sum_{n,k,r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+(k+r)s}\,p^{(k+r)s-r}\,G_r^{\lambda}(x,s,p)\,t^{n+k+r}}{n!\,r!\,(1+\alpha)_{k+r}(ks+rs-r)!\,(-\lambda)_{k+r}}.$$

$$\sum_{n,r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{sr}\,G_r^{\lambda}(x,s,p)\,t^{n+r}\,p^{sr-r}}{n!\,r!\,(rs-r)!\,(-\lambda)_r(1+\alpha)_r}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{ks+k}(-n)_k(1)_k\left(\frac{s}{p}\right)^{-sk}}{k!\,(1+\alpha+r)_k(-\lambda+r)_k\prod_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1+rs-r+j}{s}\right)_k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^{rs}\,G_r^{\lambda}(x,s,p)\,t^n\,p^{-r(1-s)}}{(n-r)!\,r!\,(rs-r)!\,(rs-r)!\,(-\lambda)_r\,(1+\alpha)_r}$$

$$ {}_2F_{s+2}\left[\begin{matrix} -n+r, 1 \\ \\ 1+\alpha+r, -\lambda+r, \triangle(s, 1+rs-r) \end{matrix} ; -\left(\frac{-p}{s}\right)^s\right], $$

जो t^n के गुणांकों को समतुलित करने पर (2.4) प्रदान करता है।

$$ L_n^{\alpha}(x)=(1+\alpha)_n \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{rs} G_r^{\lambda}(x, s, p)\, p^{-r(1-s)}}{(1+\alpha)_r (n-r)!\, r!\, (rs-r)!\, (-\lambda)_r} $$

$$ \times {}_2F_{s+2}\left[\begin{matrix} -n+r, 1 \\ \\ 1+\alpha+r, -\lambda+r, \triangle(s, 1+rs-r) \end{matrix} ; -\left(-\frac{p}{s}\right)^s\right] \qquad (2.4) $$

(2.3) तथा (2.4) से $p=s=1$ रखने पर प्रभाकर तथा सुमन[1,2] के फल प्राप्त होते हैं।

टिप्पणी

हमने $P_n(x)$, $H_n(x)$ तथा $L_n^{(\alpha)}(x)$ के प्रसारों को $G_n^{\lambda}(x, s, p)$, के पदों में प्राप्त किया है स्पष्ट है कि हम $G_n^{\lambda}(x,s,p)$ को हम उपर्युक्त बहुपदियों की श्रेणियों के रूप में भी इसी प्रकार अग्रसर होकर व्यक्त कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० टी०आर० प्रभाकर के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में सुझावों द्वारा सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. प्रभाकर, टी०आर०, (अप्रकाशित)
2. प्रभाकर, टी०आर० तथा सुमन, रेखा, **इण्डियन जर्न० प्योर एण्ड एप्लाइड मैथ०** (प्रकाशनाधीन)
3. रेनविले, ई०डी०, Special Function, मैकमिलन, (1960)
4. तोमर, आर०सी० तथा श्रीवास्तव, ए० (प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981 Pages, 241-247

लाप्लास परिवर्त पर कुछ प्रमेय

के०एस० सेवारिया
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

[प्राप्त—अप्रैल 8, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य लाप्लास परिवर्त पर कतिपय प्रमेयों को सिद्ध करना है। इन प्रमेयों का उपयोग करके कतिपय अनन्त समाकलों का मान निकाला गया है।

Abstract

Some theorem on Laplace transform. *By* K.S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to prove some theorems on Laplace transform and some infinite integrals have been evaluated by making use of these theorems.

1. चिरपरिचित लाप्लास परिवर्त

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

को सांकेतिक रूप में $\phi(p)\doteqdot f(t)$ के द्वारा अंकित किया जाता है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य लाप्लास परिवर्त पर कुछ प्रमेयों को सिद्ध करते हुए उनके उपयोग से कतिपय अनन्त समाकलों का मूल्यांकन करना है।

प्रमेय 1 यदि

$$\phi(p)\doteqdot f(t)$$

तथा

$$\psi(p)\doteqdot t^{\lambda-1/2}J_\mu(ct)f(t)$$

तो

$$\psi(p)=\pi^{1/2}2^{\lambda+1/2}p\int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+p)^{-1}G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\Big/\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)\phi(t+p)dt \tag{2}$$

बशर्तें कि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ एवं $|t^{\lambda-1/2}J_\mu(ct)f(t)|$ के लाप्लास परिवर्तों का अस्तित्व हो तथा $R(p)>0$, $c>0$.

उपपत्ति

चूंकि

$$\phi(p)\doteqdot f(t),$$

$$e^{-at}f(t)\doteqdot p(p+a)^{-1}\phi(p+a),\ R(p)>0,\ R(a)>0 \tag{3}$$

फल [3, p. 400(11)] को लें

$$t^{-\lambda-1/2}G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\Big/\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)$$

$$\doteqdot\frac{p^{\lambda+1/2}}{\pi^{1/2}2^{\lambda+1/2}}G_{02}^{01}\left(\frac{c^2p^2}{4}\Big/\tfrac{1}{2}\mu,\ -\tfrac{1}{2}\mu\right)$$

$$=\frac{p^{\lambda+1/2}}{\pi^{1/2}2^{\lambda+1/2}}J_\mu(cp) \tag{4}$$

क्योंकि

$R(p)>0$, $c>0$.

पार्सेवाल प्रमेय में (3) तथा (4) का प्रयोग करने पर, जिससे कि यदि

$$\phi(p)\doteqdot f(t)\ \text{तथा}\ \psi(p)\doteqdot g(t)$$

तो

$$\int_0^\infty\phi(t)g(t)t^{-1}dt=\int_0^\infty\psi(t)f(t)t^{-1}dt \tag{5}$$

तो हमें निम्न की प्राप्त होती है ।

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1/2}e^{-at}J_\mu(ct)f(t)dt$$

$$=\pi^{1/2}2^{\lambda+1/2}\int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+a)^{-1}G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\Big/\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)\phi(t+a)dt$$

a के स्थान पर p रखने तथा (1) का उपयोग करने पर हमें (2) की प्राप्ति होती है ।

आगे जो कुछ आयेगा उसमें हमने $Q_n^m(x)$ की मैकराबर्ट की परिभाषा का उपयोग किया है ।

उदाहरण 1

[1, p. 198(31)] को लें

$$t^{-1/2}K_{\rho}(at)K_{\sigma}(bt)$$

$$\doteqdot \gamma^{1/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\rho-\sigma)\, \overset{-\rho}{Q}_{\sigma+1/2}(\cosh\alpha)\, \overset{-\sigma}{Q}_{\rho-1/2}(\cosh\beta)$$

$$=\phi(p),\ R(p+a+b)>0,\ |R(\rho)|+|R(\sigma)|<\tfrac{1}{2},\ \sinh\alpha=a\gamma,$$

$$\cosh\beta=b\gamma,\ \cosh\alpha\cosh\beta=p\gamma,\ |Im\,\alpha|,\ Im\,\beta|<\pi/2.$$

तो हमें निम्न फल[4] प्राप्त होगा

$$t^{\lambda-1/2}J_{\mu}(ct)f(t)=t^{\lambda-1}J_{\mu}(ct)K_{\rho}(at)K_{\sigma}(bt)$$

$$\doteqdot \sum_{\rho,-\rho}\ \sum_{\sigma,-\sigma} \frac{2^{\lambda-3}\Gamma(-\rho)\Gamma(-\sigma)\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma+1)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma)\}c^{\mu}a^{\rho}b^{\sigma}}{\pi^{1/2}\Gamma(1+\mu)p^{\rho+\lambda+\mu+\sigma-1}}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma+1),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma);\ 1+\mu,\ 1+\rho,\ 1+\sigma;\ -\frac{c^2}{p^2},\frac{a^2}{p^2},\ \frac{b^2}{p^2}\right]$$

$$=\psi(p),\ R(\lambda+\mu\pm\rho\pm\sigma)>0,\ R(p)>0,\ R(a)>0,\ R(b)>0,\ c>0.$$

प्रमेय को सम्प्रयुक्त करने पर

$$\int_0^{\infty} t^{-\lambda-1/2}\gamma^{1/2}\, G_{22}^{01}\left(\frac{t^2}{c^2}\ \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right) \overset{-\rho}{Q}_{\sigma+1/2}(\cosh\alpha)\, \overset{-\sigma}{Q}_{\rho-1/2}(\cosh\beta)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\rho-\sigma)}\sum_{\rho,-\rho}\ \sum_{\sigma,-\sigma}\frac{\Gamma(-\rho)\Gamma(-\sigma)\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma+1)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma)\}a^{\rho}b^{\sigma}c^{\mu}}{2^{7/2}\pi p^{\lambda+\mu+\rho+\sigma}\Gamma(1+\mu)}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma+1),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\rho+\sigma);\ 1+\mu,\ 1+\rho,\ 1+\sigma;-\frac{c^2}{p^2},\frac{a^2}{p^2},\frac{b^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि

$$R(\lambda+\mu+\sigma+\rho+1)>0,\ R(a)>0,\ R(b)>0,\ \cosh\alpha=(1+a^2\gamma^2)^{1/2},\ \cosh\beta=(1+b^2\gamma^2)^{1/2},$$

$$\gamma^2=([\{a^2+b^2-(t+p)^2\}^2-4a^2b^2]^{1/2}-\{a^2+b^2-(t+p)^2\}/2a^2b^2,\ c>0.$$

प्रमेय 2 यदि

$$\phi(p)\doteqdot f(t)$$

तथा

$$\psi(p)\doteqdot t^{\lambda-1/2}K_{\mu}(ct)f(t)$$

तो

$$\psi(p)=\pi^{1/2}2^{\lambda-1/2}p\int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+p)^{-1}G_{22}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\Big/\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)\phi(t+p)dt \quad (6)$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ एवं $|t^{\lambda-1/2}K_\mu(ct)f(t)$ के लाप्लास परिवर्तों का अस्तित्व हो तथा $R(p)>0,\ c>0$

उपपत्ति

[3, p. 400(11)] को लें तथा (4) की भाँति अग्रसर हों तो

$$t^{-\lambda-1/2}G_{22}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\ \begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu,\ 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right) \doteqdot \pi^{-1/2}2^{1/2-\lambda}p^{\gamma+1/2}K_\mu(cp) \quad (7)$$

क्योंकि

$$R(p)>0,\ c>0$$

(5) में (3) तथा (7) का उपयोग करने तथा प्रमेय 1 की उपपत्ति में दी गई विधि के समान ही अनुसरण करने पर हमें (6) की प्राप्ति होती है।

उदाहरण 2

[3, p. 400(11)] फल को लें

$$f(t)=t^{\sigma-3/2}G_{\gamma+n,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\frac{n^n}{zt^n}\Big/\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_r,\ \triangle(n;\ \sigma-\frac{1}{2})\\ b_1,\ \ldots,\ b_\delta\end{matrix}\right)$$

$$\doteqdot(2\pi)^{1/2(1-n)}n^{\sigma-1}p^{3/2-\sigma}G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(zp^n\ \begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_\gamma\\ b_1,\ \ldots,\ b_\delta\end{matrix}\right)$$

$$=\phi(p),\ R(\sigma+n-na_j)>\tfrac{1}{2},\ (j=1,\ \ldots,\ \beta),\ R(p)>0,$$

$$\alpha+\beta>\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta+n),\ |\arg z|<(\alpha+\beta-\tfrac{1}{2}\gamma-\tfrac{1}{2}\delta-\tfrac{1}{2}n)\pi.$$

तो हमें निम्न फल प्राप्त होता है[2]

$$t^{\lambda-1/2}K_\mu(ct)f(t)=t^{\sigma+\lambda-2}K_\mu(ct)G_{\gamma+n,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\frac{n^n}{zt^2}\ \begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_\gamma,\ \triangle(n_1;\ \sigma-\frac{1}{2})\\ b_1,\ \ldots,\ b_\delta\end{matrix}\right)$$

$$\div \frac{(2\pi)^{(3/2-n/2-\alpha-\beta+1/2\gamma+1/2\delta}}{2^{\Sigma a_\gamma-\Sigma b_\delta+\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}\gamma+1}} \sum_{\mu,-\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c^{\mu+2r} n^{\sigma+\lambda+\mu+2r-3/2}}{(r)!\,\sin(-\mu\pi)\Gamma(1-\mu-r)p^{\sigma+\lambda+\mu+2r-2}}$$

$$\times G^{2\alpha+2n,2\beta}_{2\gamma+2n,2\delta+2n}\left(\frac{p^{2n}}{z^2 2^{2(\delta-\gamma)}} \middle| \begin{matrix} \triangle(2;a_1), \ldots, \triangle(2;a_\gamma), \triangle(2n;\sigma-\frac{1}{2}) \\ \triangle\left(n;\frac{\sigma+\lambda+\mu+2r}{2}\right), \triangle\left(n;\frac{\sigma+\lambda+\mu+2r-1}{2}\right), \\ \times\triangle(2;b_1), \ldots, \triangle(2;b_\delta) \end{matrix}\right)$$

$=\psi(p)$, $R(\sigma+\lambda\pm\mu+n-na_j)>1$, $(j=1, \ldots, \beta)$, $R(p)>0$,

$\alpha+\beta>\frac{1}{2}(\gamma+\delta+n)$, $|\arg z|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}n)\pi$, $R(c)>0$.

प्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+p)^{1/2-\sigma} G^{02}_{22}\left(\frac{t^2}{c^2} \middle| \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\mu, 1+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda \end{matrix}\right) G^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}\left(z(t+p)^n \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_\gamma \\ b_1, \ldots, b_\delta \end{matrix}\right) dt$$

$$=\frac{(2\pi)^{1/2-\alpha-\beta+1/2\gamma+1/2\delta}}{2^{\Sigma a_\gamma-\Sigma b_\delta+\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}\gamma+\lambda}} \sum_{\mu,-\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c^{\mu+2r} n^{\sigma+\lambda+\mu+2r-3/2}}{(r)!\,\sin(\mu\pi)\Gamma(1+\mu+r)p^{\sigma+\lambda+\mu+2r-1}}$$

$$\times G^{2\alpha+2n,2\beta}_{2\gamma+2n,2\delta+2n}\left(\frac{p^{2n}}{z^2 2^{2(\delta-\gamma)}} \middle| \begin{matrix} \triangle(2;a_1), \ldots, \triangle(2;a_\gamma), \triangle(2n;\sigma-\frac{1}{2}) \\ \triangle\left(n;\frac{\sigma+\lambda+\mu+2r}{2}\right), \triangle\left(n;\frac{\sigma+\lambda+\mu+2r-1}{2}\right), \\ \times\triangle(2;b_1), \ldots, \triangle(2;b_\delta) \end{matrix}\right)$$

क्योंकि

$R(\sigma+\lambda\pm\mu+n-na_j)>1$, $(j=1, \ldots, \beta)$, $R(p)>0$, $c>0$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}(\gamma+\delta)$,

$|\arg z|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$.

उदाहरण 3

ज्ञात फल[4] को लें

$$f(t)=t^{\sigma-3/2} \prod_{i=1}^{r} [J_{\mu i}(a_i t)]$$

$$\div \frac{2^{\sigma-3/2}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+m\pm\frac{1}{2})\} \prod_{i=1}^{r}\left(a_i^{\mu i}\right)}{\pi^{1/2}p^{\sigma+m-3/2} \prod_{i=1}^{r} [\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times F_c\left[\frac{\sigma+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{\sigma+m-\frac{1}{2}}{2}; 1+\mu_1, .., 1+\mu_r; -\frac{a_1^2}{p^2}, ..., -\frac{a_r^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि

$$R(\sigma+m-\tfrac{1}{2})>0,\ R(p)>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i),\ a_i>0,\ (i=1, ..., r).$$

तो सक्सेना के परिणाम[4] में थोड़ा संशोधन कर देने से

$$t^{\lambda-1/2}K_\mu(ct)f(t)=t^{\sigma+\lambda-2}\prod_{i=1}^{r}[J_{\mu i}(a_i t)]K_\mu(ct)$$

$$\doteqdot \sum_{\mu,-\mu}\frac{2^{\sigma+\lambda-3}\Gamma(-\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\mu+m)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\mu+m-1)\}\prod_{i=1}^{r}\left(a_i^{\mu i}\right)c^\mu}{\pi^{1/2}p^{\sigma+\lambda+\mu+m-2}\prod_{i=1}^{r}[\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times F_c\left[\frac{\sigma+\lambda+\mu+m}{2}, \frac{\sigma+\lambda+\mu+m-1}{2}; 1+\mu_1, ..., 1+\mu_r, 1+\mu; -\frac{a_1^2}{p^2}, ..., -\frac{a_r^2}{p^2}, \frac{c^2}{p^2}\right]$$

$$=\psi(p), R(\sigma+\lambda+m+\mu)>1,\ R(p+c)>0,\ m=\sum_{i=0}^{r}(\mu_i),\ a_i>0,\ (i=1, ..., r).$$

प्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+p)^{1/2-\sigma-m}G_{22}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\Big/\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\mu, 1+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)$$

$$\times F_c\left[\frac{\sigma+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{\sigma+m-\frac{1}{2}}{2}; 1+\mu_1, ..., 1+\mu_r; -\frac{a_1^2}{(t+p)^2}, ..., -\frac{a_r^2}{(t+p)^2}\right]dt$$

$$=\sum_{\mu,-\mu}\frac{\Gamma(-\mu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\mu+m)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\mu+m-1)\}c^\mu}{2\pi^{1/2}p^{\sigma+\lambda+\mu+m-1}\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+m\pm\frac{1}{2})\}}$$

$$\times F_c \left[\frac{\sigma+\lambda+\mu+m}{2}, \frac{\sigma+\lambda+\mu+m-1)}{2}\}; 1 \cdot \mu_1, ..., 1+\mu_r, 1+\mu; -\frac{a_1^2}{p^2}, ..., -\frac{a_r^2}{p^2}, \frac{c^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि

$$R(\sigma+\lambda+m\pm\mu)>1, R(p)>0, c>0, m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i), a_i>0, (i=1, ..., r).$$

प्रमेय 3 : यदि

$$\phi(p) \doteqdot f(t)$$

तथा

$$\psi(p) \doteqdot t^{\lambda-1/2} Y_\mu(ct) f(t)$$

तो

$$\psi(p) = \pi^{1/2} 2^{\lambda+1/2} p \int_0^\infty t^{-\lambda-1/2}(t+p)^{-1} G_{33}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\middle/\begin{matrix}1+\frac{1}{2}\mu, 1-\frac{1}{2}\mu, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu, \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)\phi(t+p)dt$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो तथा $f(t)$ एवं $|t^{\lambda-1/2} Y_\mu(ct) f(t)|$ का लाप्लास परिवर्त अस्तित्व में हो और $R(p)>0, c>0$.

उपपत्ति

[3, p. 400(11)] को लें तथा (4) की ही भाँति अग्रसर हों तो

$$t^{-\lambda-1/2} G_{33}^{02}\left(\frac{t^2}{c^2}\middle/\begin{matrix}1+\frac{1}{2}\mu, 1-\frac{1}{2}\mu, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu, \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right) \quad (8)$$

$$\doteqdot \pi^{-1/2} 2^{-\lambda-1/2} p^{\lambda+1/2} Y_\mu(cp) \quad (9)$$

क्योंकि $R(p)>0, c>0$.

(5) में (3) तथा (9) को व्यवहृत करने तथा प्रमेय 1 की उपपत्ति में दी गई विधि का पालन करने पर (8) की प्राप्ति होती है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 1, मकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954
2. गोखरू, डी०सी०, पी०एच०डी० थीसिस, जोधपुर विश्वविद्यालय, 1966
3. सक्सेना, आर०के०, प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया, 1960, **26**(4A), 400-413
4. वही, Monat-shefte fur Mathematik, 1966, **70**, 161-163

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 249-259

लेगेण्ड्र श्रेणी की परम चेजारो संकलनीयता

सुशील शर्मा

गणित विभाग, माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर 9, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेगेण्ड्र श्रेणी की $|C, \delta|$ संकलनीयता पर पाण्डेय द्वारा प्राप्त ज्ञात परिणाम का सार्वीकरण किया गया है। प्राप्त परिणाम फूरियर श्रेणी पर हिस्लाप के परिणाम के संगत है।

Abstract

The absolute Cesaro summability of Legendre series. *By* Sushil Sharma, Department of Mathematics, Madhav Vigyan Mahavidhyalaya, Ujjain.

In this paper we generalise a well known result of Pandey on $|C, \delta|$ summability of Legendre series. Our result corresponds to that of Hyslop for Fourier series.

1. रैखिक अन्तराल $(-1, 1)$ में लेबेस्क समाकलनीय फलन $f(x)$ की संगत लेगेण्ड्र श्रेणी को

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \Sigma U_n \text{ माना,} \tag{1.1}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जहाँ

$$a_n = (n+1/2) \int_{-1}^{1} f(y) P_n(y) dy$$

तथा $P_n(x)$ n कोटि का लेगेण्ड्र बहुपदी है। प्रस्तुत प्रपत्र में सर्वत्र लिखेंगे

$$\phi(\theta, w) = \{f(\cos w) - f(\cos \theta)\},$$

$$\phi(t) = \{f(\cos(\theta - t) - f(\cos \theta)\},$$

हम निम्नलिखित को सिद्ध करेंगे।

2. प्रमेय

यदि $0<\alpha<1/2$ के लिए

$$|f(x+h)-f(x)|=O(h^{\alpha}\log 1/h) \text{ ज्यों ज्यों } h\to 0 \tag{2.1}$$

तो लेगेण्ड्र श्रेणी (1.1) प्रत्येक $\delta>\frac{1}{2}-\alpha$ के लिए, अन्तराल $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$; $\epsilon>0$ के एक विन्दु x पर परम संकलनीय (C, δ) है।

प्रमेय की उपपत्ति में हमें निम्नांकित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका

([3] जेगो 147, p. 194–195 $\beta=\alpha=0$ के लिए)

$$P_n(\cos\theta)\ \begin{cases} n^{-1/2}K(\theta)[\{\cos(N\theta+\gamma)\}+(n\sin\theta)^{-1}O(1)] \\ \qquad c/n\leqslant\theta\leqslant\pi-c/n \text{ के लिए} \\ n^{-1/2}K(\theta)\cos(N\theta+\gamma)+O(n^{-3/2}) \\ \qquad \epsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\epsilon;\ \epsilon>0 \text{ के लिए} \\ N=(n+\frac{1}{2});\ \gamma=-\frac{\pi}{2};\ K(\theta)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\sin\theta}\right)} \end{cases} \tag{2.1}$$

c धन संख्या है।

3. प्रमेय की उपपत्ति

$$nU_n=n(n+1)\int_{-1}^{1} f(y)P_n(y)P_n(x)\,dy.$$

$$t_n^{\delta} = \int_{-1}^{1} f(y)\left[\frac{1}{A_n^{\delta}}\sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1}\ K(K+\tfrac{1}{2})P_K(x)P_K(y)\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{1} [f(y)-f(x)]\left\{\frac{1}{A_n^{\delta}}\sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1}\ K(K+\tfrac{1}{2})P_K(x)P_K(y)\right\}dx$$

(लेगेण्ड्र बहुपदी के लाम्बिकता के गुण के फलस्वरूप)

इस प्रकार हमें प्राप्त है

$$\sum_{n-1}^{\infty} n^{-1} \mid t_n^{\delta} \mid < K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} \left| \int_{-1}^{1} \{f(y)-(x\} \left[\sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1} K(K+\tfrac{1}{2}) P_K(x) P_K(y) \right] dy \right|$$

माना $x=\cos\theta$ तथा $y=\cos w$, तो

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mid t_n^{\delta} \mid < K \sum_{1}^{\infty} n^{-1-\delta} \left| \int_0^{\pi} \phi(\theta, w) \left\{ \sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1} K(K+\tfrac{1}{2}) P_K(\cos\theta) P_K(\cos w) \right\} \sin w \, dw \right|$$

$$\leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1} \left[\left| \int_0^{\alpha n} \right| + \left| \int_{\alpha n}^{\pi-\alpha n} \right| + \left| \int_{\pi-\alpha n}^{\pi} \right| \right] = L_1 + L_2 + L_3, \text{ माना} \tag{3.1}$$

$$L_1 = K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1} \left| \int_0^{\alpha n} \phi(\theta, w) \left[\sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1} K(K+\tfrac{1}{2}) P_K(\cos\theta) P_K(\cos w) \right] \sin w \, dw \right|$$

$$= K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} n^{3/2} n^{\delta} \int_0^{\alpha n} \mid \phi(\theta, w) \mid \sin w \, dw$$

$$= K \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} \int_0^{\alpha n} w \, dw; \ \phi(\theta, w) \text{ परिबद्ध है ।} \tag{3.2}$$

$$= K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log_n)^{2\alpha+2}}{n^{3/2}} = O(1)$$

और $w=\pi-z$ रखने पर तथा सरलीकरण के फलस्वरूप

$$L_3 = O(1). \tag{3.3}$$

अन्त में

$$L_2 = K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1} \left| \int_{\alpha n}^{\pi-\alpha n} \phi(\theta, w) \left\{ \sum_{K=0}^{n} A_{n-K}^{\delta-1} (n-K)(n-K+\tfrac{1}{2}) P_{n-K}(\cos\theta) P_{n-K}(\cos w) \right\} \times \sin w \, dw \right|$$

$$\leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} \left[\left| \int_{\alpha n}^{\epsilon/2} \right| + \left| \int_{\epsilon/2}^{\theta} \right| + \left| \int_{\theta}^{\pi-\epsilon/2} \right| + \left| \int_{\pi-\epsilon/2}^{\pi-\alpha n} \right| \right]$$

$$= L_{2\cdot 1} + L_{2\cdot 2} + L_{2\cdot 3} + L_{2\cdot 4} \text{ माना} \tag{3.4}$$

अब

$$L_{2\cdot2}=K\sum_{n=1}^{\tau} n^{-\delta-1}\left|\int_{\epsilon/2}^{\theta}\phi(\theta,w)\left\{\sum_{K=0}^{\infty} A_{n-K}^{\delta-1}(n-K)(n-K+\tfrac{1}{2})P_{n-K}(\cos\theta)P_{n-K}(\cos w)\right\}\right.$$

$$\sin w\,dw$$

प्रमेयिका 1 को व्यवहृत करने तथा कुछ सरलीकरण के बाद

$$\leqslant K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\left|\int_{\epsilon/2}^{\theta}\phi(\theta,w)\left\{\sum_{K=0}^{n-1} A_K^{\delta-1}(n-K+\tfrac{1}{2})(\sin\theta)^{-1/2}(\sin w)^{-1/2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times[\cos\{(n-K+\tfrac{3}{2})(\theta+w)\}]\right\}\sin w\,dw\right|+K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\left|\int_{\epsilon/2}^{\theta}\phi(\theta,w)\right.$$

$$\left\{\sum_{K=0}^{n-1} A_K^{\delta-1}(n-K+\tfrac{1}{2})(\sin\theta)^{-1/2}(\sin w)^{-1/2}[\cos\{(n-K+\tfrac{1}{2})(\theta-w)\}]\right\}$$

$$\sin w\,dw+O(1).$$

$$=L_{2\cdot2\cdot1}+L_{2\cdot2\cdot2}+O(1). \tag{3.5}$$

$\theta-w=t$ रखने पर

$$L_{2\cdot2\cdot2}=K\sum_{1}^{\infty} n^{-\delta-1}\left|\int_{0}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left\{\sum_{K=0}^{n-1} A_K^{\delta-1}(n-K+\tfrac{1}{2})(\sin\theta)^{-1/2}\sin^{-1/2}(\theta-t)\right.\right.$$

$$\left.\times\cos(n-K+\tfrac{1}{2})t\,\sin(\theta-t)\right\}dt.$$

$$L_{2\cdot2\cdot2}\leqslant K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\left|\int_{0}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left\{\sum_{K=0}^{n-1} A_K^{\delta-1}(n-K+\tfrac{1}{2})\cos(n-K)t\cos t/2\right\}dt\right|$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\left|\int_{0}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left\{\sum_{K=0}^{n-1} A_K^{\delta-1}(n-K+\tfrac{1}{2})\sin t/2\sin(n-K)t\,dt\right\}\right|$$

$(\sin\theta)^{-1/2}\sin^{-1/2}(\theta-t)$ का मान जेनरिक अचर में सम्मिलित है।

$$=L_{2\cdot2\cdot2\cdot1}+L_{2\cdot2\cdot2\cdot2}\ \text{माना}, \tag{3.6}$$

अब हम लिख सकते हैं कि

$$L_{2\cdot2\cdot2\cdot1}\leqslant K\left\{\sum_{n=1}^{\tau} S_1(n)+\sum_{n=1}^{\infty} S_2(n)\right\}$$

जहाँ

$$S_1(n)=n^{-\delta}\left|\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\cos t/2\sum_{K=0}^{\infty}A_K^{\delta-1}\cos(n-K)t\,dt\right|$$

$$S_2(n)=n^{-\delta-1}\left|\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\cos t/2\left\{\sum_{K=n}^{\infty}nA_K^{\delta-1}\cos(n-K)t\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{K=0}^{n-1}K\,A_n^{\delta-1}\cos(n-K)t\right\}dt\right|$$

चूंकि परिकल्पना (2.1) से ज्ञात है कि

$$|f(x+h)-f(x)|=O(h^{\alpha}\log 1/h)\ \text{ज्यों ज्यों}\ h\to 0$$

इस प्रकार $x+h=\cos w$, $x=\cos\theta$ तथा $\theta-w=t$ के लिए

$$\phi(t)=f\{\cos(\theta-t)\}-\{f(\cos\theta)\}=O(h^{\alpha}\log 1/h)$$

किन्तु हम देखते हैं कि

$$t=\cos^{-1}x-\cos^{-1}(x+h)\geqslant h$$

$$|f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)|=O(h^{\alpha}\log 1/h)\ \text{ज्यों ज्यों}\ h\to 0 \tag{3.7}$$

अब उपपत्ति हिस्लाप [2] की तरह है जिससे

$$S_2(n)\leqslant n^{-\delta-1}\left|\int_0^{1/n}\phi(t)\left\{\sum_{K=n}^{\infty}nA_K^{\delta-1}\cos(n-K)t+\sum_{K=0}^{n-1}A_K^{\delta-1}\cos(n-K)t\right\}dt\right|$$

$$+n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left\{\sum_{K=n}^{\infty}nA_K^{\delta-1}\cos(n-K)t-\sum_{K=0}^{n-1}K\,A_K^{\delta-1}\cos(n-K)t\right\}dt\right|$$

$$=S_{2\cdot1}(n)+S_{2\cdot2}(n)\ \text{माना,} \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{2\cdot1}(n)=K\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\delta-1}\int_0^{1/n}|\phi(t)|\,n^{\delta}t^{-1}\,dt$$

$$<K\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\int_0^{1/n}t^{\alpha-1}\log 1/t\,dt$$

$$<K\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\Big[t^{\alpha}\log 1/t\Big]_0^{1/n}+\int_0^{1/n}\frac{t^{\alpha}}{t}\,dt$$

$$=K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-a} \log_n + K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-a}$$

$$=O(1) \tag{3.9}$$

$$S_{2\cdot 2}(n)=n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} \phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left[\sum_{K=n}^{\infty} nA_K^{\delta-1}\{\sin(K-n+1)t-\sin(K-n-1)t\}\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{K=0}^{n-1} K A_K^{\delta-1}\{\sin(n-K+1)t-\sin(n-K-1)t\}\right]dt$$

खण्डशः संकलन करने पर

$$S_{2\cdot 2}(n)=n^{-\delta-1}\left|\int_{1/2}^{\theta-\epsilon/2} \phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left[-nA_n^{\delta-1}\sin t/2+n\sum_{K=n}^{\infty}\left\{A_K^{\delta-1}-A_{K+1}^{\delta-1}\right\}\right.\right.$$

$$\left.\sin(n-K+1)t+\sum_{K=0}^{n-2}\triangle\left(K A_K^{\delta-1}\right)\sin(n-K+1)t+(n-1)A_{n-1}^{\delta-1}\sin t/2\right]dt$$

$$\leqslant n^{-\delta}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left[\sum_{K=n}^{\infty}\left\{A_K^{\delta-1}-A_{K+1}^{\delta-1}\right\}\sin(n-K+1)t\,dt\right]\right|$$

$$+n^{-\delta}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2}\tfrac{1}{2}\phi(t)\left\{A_{n-1}^{\delta-1}-A_n^{\delta-1}\right\}dt\right|+n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{K=0}^{n-2}\left\{K A_K^{\delta-1}-(K-1)A_K^{\delta-1}\right\}\sin(n-K+1)t\,dt\right]\right|+O(1).$$

$$=S_{2\cdot 2\cdot 1}(n)+S_{2\cdot 2\cdot 2}(n)+S_{2\cdot 2\cdot 3}(n)+O(1) \quad \text{माना,} \tag{3.10}$$

हम देखते हैं कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2\cdot 2\cdot 1}(n)<K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta}\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} |\,\phi(t)\,/\,n^{\delta-2}\,t^{-2}\,dt$$

$$<K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} t^{a-2}\log 1/t$$

$$=K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left[\,t^{a-1}\log 1/t\,\right]_{1/2}^{\theta-\epsilon/2}+\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2}\frac{t^{a-1}}{t}\,dt$$

$$=K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha+1}} + K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

$$=O(1). \tag{3.11}$$

इसी प्रकार से

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2\cdot 2\cdot 2}(n)=O(1). \tag{3.12}$$

अब सम्बन्ध

$$KA_K^{\delta-1}-(K-1)A_{K-1}^{\delta-1}=\delta\, A_{K-1}^{\delta-1}$$

का प्रयोग करने पर

$$S_{2\cdot 2\cdot 3}(n)=\delta n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} \phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left\{\sum_{K=0}^{n-2} A_K^{\delta-1}\sin(n-K-1)t\right\}dt\right|$$

$$\leqslant \delta n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} \phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left\{\sum_{K=0}^{\infty} A_K^{\delta-1}\sin(n-K+1)t\right\}dt\right|$$

$$+\delta\,.\,n^{-\delta-1}\left|\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} \phi(t)(2\sin t/2)^{-1}\left\{\sum_{K=n-1}^{\infty} A_K^{\delta-1}\sin(n-K+1)t\right\}dt\right|$$

$$=S_{2\cdot 2\cdot 3\cdot 1}+S_{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2} \text{ माना}$$

जब कि $S_{2\cdot 2\cdot 1}(n)$ में

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2\cdot 2\cdot 3\cdot 1}=O(1). \tag{3.13}$$

चूँकि $0<t<\pi$ के लिए

$$\left|\sum_{K=0}^{\infty} A_K^{\delta-1}\sin(n-K+1)t\right|=O(t^{-\delta})$$

हमें प्राप्त है कि

$$S_{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2}<K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} |\,\phi(t)\,|\; t^{-\delta-1}$$

$$<K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta-1}\int_{1/n}^{\theta-\epsilon/2} t^{\alpha-\delta-1}\log 1/t\; dt$$

$$=K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{\alpha+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

$$=O(1). \tag{3.14}$$

अब हम $S_1(n)$ की विवेचना करेंगे

$$S_1(n)=n^{-\delta}\left|\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left[\sum_{K=0}^{\infty}A_K^{\delta-1}\cos(n-K)t\right]\cos t/2\,dt\right|$$

$$=n^{-\delta}\left|\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left[\sum_{K=0}^{\infty}\left\{A_K^{\delta-1}\cos nt\cos Kt\cos t/2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+A_K^{\delta-1}\sin nt\sin Kt\cos t/2\right\}\right]dt$$

अब हम लिखेंगे कि

$$\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\left[\sum_{K=0}^{\infty}\left\{A_K^{\delta-1}\cos nt\cos Kt\cos t/2+A_K^{\delta-1}\sin nt\sin Kt\cos t/2\right\}\right]dt$$

$$=\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)\,p(t)\cos nt\,dt+\int_0^{\theta-\epsilon/2}\phi(t)q(t)\sin nt\,dt$$

$$=p_n+q_n \tag{3.15}$$

जहां

$$p(t)=\cos t/2\sum_{K=0}^{\infty}A_K^{\delta-1}\cos Kt;\ q(t)=\cos t/2\sum_{K=0}^{\infty}A_K^{\delta-1}\sin Kt$$

चूँकि $p(t)$ तथा $q(t)$ संतत फलन हैं $\eta\leqslant t\leqslant\pi$ के लिए $0<t<\eta$, $|p(t)|<At^{-\delta}$ के लिए तथा $|q(t)|<At^{-\delta}$ के लिए भी।

इस प्रकार हम p_n तथा q_n अचरों के क्रमशः सम तथा विषम फलन के फूरियर गुणांक के रूप में मान सकते हैं और इनमें से प्रत्येक फलन L^2 समाकलनीय है। इस प्रसंग में हम कल्पना करते हैं कि सम्पूर्ण परास $[\theta-\epsilon/2, \pi]$ में फलन $\phi(t)\equiv 0$

पार्सेवाल की प्रमेय के आधार पर

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n^2\sin^2 nh<A\int_0^{\theta-\epsilon/2}|\phi(t+h)p(t+h)-\phi(t-h)p(t-h)|^2dt$$

$$\leqslant 2A\{i_1(h)+i_2(h)\}$$ जहाँ

$$i_1(h)=\int_0^{\theta-\kappa/2} \{p(t+h)\}^2\{\phi(t+h)-\phi(t-h)\}^2dt$$

$$i_2(h)=\int_0^{\theta-\epsilon/2} \{\phi(t-h)\}^2\{p(t+h)-p(t-h)\}^2dt$$

अब $h>0$ के लिए

$$\phi(t+h)-\phi(t-h)=f\{\cos(\theta-t-h)\}-f\{\cos(\theta-t+h)\}$$

$$=f\{\cos(\theta-t-h)\}-f\{\cos(\theta-t)\}+f\{\cos(\theta-t)\}-f\{\cos(\theta-t+h)\}$$

$$<Ah^{\alpha}\log 1/h$$

अत:

$$i_2(h)<Ah^{2\alpha}\log^2 1/h\int_0^{\theta-\epsilon/2} t^{-2\delta}\,dt=O(h^{2\alpha}\log^2 1/h)\ 0<\delta<\tfrac{1}{2}$$ के लिए

हम मानते हैं कि

$$i_2(h)=i_{2\cdot1}(h)+i_{2\cdot2}(h) \quad \text{जहाँ} \tag{3.16}$$

$$i_{2\cdot1}(h)=\int_{-h}^{h} \{\phi(t)\}^2\{p(t+2h)-p(t)\}^2dt$$

$$\leqslant 2\int_{-h}^{h} \{\phi(t)\}^2[\{p(t+2h)\}^2+\{p(t)\}^2]dt$$

$$=O\left[\int_{-h}^{h} t^{2\alpha}\log^2 1/h(t+2h)^{-2\delta}\,dt-\int_{-h}^{h} t^{2\alpha-2\delta}\log^2 1/t\right]$$

समाकल संकेत में से $\log^2 1/t$ को निकाल लेने पर

$$=O(h^{2\alpha-2\delta+1}\log^2 1/h)$$

तथा

$$i_{2\cdot2}(h)=\int_h^{\theta-\epsilon/2-h} \{\phi(t)\}^2\{p(t+2h)-p(t)\}^2dt$$

$$=4h^2\int_h^{\theta-\epsilon/2-h} \{\phi(t)\}^2\{p^1(t+2\theta h)\}^2dt;\ (0<\theta<1)$$

$$=O(h^{2\alpha-2\delta+1}\log^2 1/h) \tag{3.17}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2\sin^2 h=O(h^{2\alpha})\text{ ज्यों ज्यों } h\to 0$$

$h=\pi/2N$ रखने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \sin^2 \left| \frac{n\pi}{2N} = O(N^{-2\alpha}) \right.$$

माना $N=2^\nu$, तो

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} p_n^2 = O(2^{-2\nu\alpha})$$

अब श्वार्ज असमिका से

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} n^{-\delta} \mid p_n \mid \leqslant \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} p_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} n^{-2\delta} \right\}^{1/2}$$

$$= O\{2^{-\nu(\alpha+\delta-1/2)}\} \tag{3.18}$$

हम qn के लिए भी ऐसा क्रम प्राप्त कर सकते हैं और इस तरह अन्त में

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_1(n) \leqslant \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} \mid p_n \mid + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} \mid q_n \mid \right\}.$$

$$= O\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+\delta-1/2)} \right]$$

$$= O(1); \quad \delta > \tfrac{1}{2} - \alpha \text{ के लिए} \tag{3.19}$$

इसी प्रकार

$$L_{2\cdot2\cdot2\cdot2}(n) = O(1) \tag{3.20}$$

समीकरण (3.6) से (3.19) तक को संग्रह करने पर

$$L_{2\cdot2\cdot2} = O(1). \tag{3.21}$$

$L_{2\cdot2\cdot1}$ से भी इसी तरह निपटा जा सकता है फलस्वरूप

$$L_{2\cdot2} = O(1). \tag{3.22}$$

$L_{2\cdot2}$ की ही भाँति अग्रसर होते हुए L_2 के अन्य खण्डों को $O(1)$ सिद्ध किया जा सकता है

$$L_2 = O(1). \tag{3.23}$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० बी०के० व्योहर ने सहाय्य पहुँचाया जिसके लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. पाण्डेय, जी०एस०, **डी०एस०सी० थीसिस**, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

2. हिस्लाप, जे०एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1937, **43**, 475-483

3. जिगमण्ड, ए०, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1928, **3**, 194-196

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 261-264

H-फलन वाला द्विगुण समाकल

एस०एन० अगल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त–अगस्त 18, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य H-फलन वाले एक द्विगुण समाकल का मान ज्ञात करना है। साथ ही विशिष्ट दशाओं के रूप में राठी द्वारा प्राप्त कई फल सम्मिलित हैं।

Abstract

A double integral involving H-function. *By* S.N. Agal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur

The object of this paper is to evaluate a double integral involving H-function which includes as its particular cases several results given by Rathie

1. प्रस्तावना

फाक्स[3] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix} \right.\right]=(2\pi i)^{-1}\int_L g(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ $g(s)$ के

$$g(s)=\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_js) \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js) \Big/ \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_js) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-e_js \tag{1.2}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है और प्राचल इस प्रकार नियन्त्रित हैं कि H-फलन सार्थक है।

ब्राक्समा[1] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दक्षिण पक्ष का समाकल परम अभिसारी है, जब $\phi>0$ तथा $|\arg z|<1/2\pi\phi$ जहाँ

$$\phi=\sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{b} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{p} f_j \tag{1.3}$$

निम्नलिखित गुणों की आवश्यकता होगी[-7]

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a,0),\ {}_2(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix}\right]=\Gamma(1-a)\quad H_{p-1\ q}^{m\ n-1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_2(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$p\geqslant n\geqslant 1,\ Re(1-a)>0. \tag{1.4}$$

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1},(b,0) \end{matrix}\right]=\frac{1}{\Gamma(1-b)}\, H_{p\ q-1}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1} \end{matrix}\right]$$

$$q-1\geqslant m\geqslant 0,\ \mathrm{Re}(1-b)>0. \tag{1.5}$$

$$H_{q\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a,-h),\ {}_2(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_p \end{matrix}\right]= H_{p-1\ q+1}^{m+1\ n-1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_2(a_j,e_j)_p \\ (1-a,h),\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$p\geqslant n\geqslant 1,\ h>0 \tag{1.6}$$

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1},\ (b,-h) \end{matrix}\right]= H_{p+1\ q-1}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p,\ (1-b,h) \\ {}_1(b_j,f_j)_{q-1} \end{matrix}\right]$$

$$q-1\geqslant m\geqslant 0,\ h>0. \tag{1.7}$$

2. मुख्य फल

इस प्रपत्र में H-फलन वाला निम्नलिखित द्विगुण समाकल निहित है :

$$\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}x^{\gamma-1/2}[(x+a)(x+b)]^{-\gamma}$$

$$\times\, H_{p\ q}^{m\ n}\left[z\, e^{i(\lambda+\mu)\theta}\,(\sin\theta)^{\lambda}\,(\cos\theta)^{\mu}\left\{\frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(x+a)\,(x+b)}\right\}^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix}\right]dx\, d\theta$$

$$=\sqrt{\pi}e^{1/2i\pi\alpha}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2\gamma}$$

$$\times\, H_{p+3\ q+2}^{m\ n+3}\left[z\, e^{1/2i\pi\lambda} \,\middle|\, \begin{matrix} (3/2-\gamma,\delta),(1-\alpha,\lambda),(1-\beta,\mu),{}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q,(1-\gamma,\delta),(1-\alpha-\beta,\lambda+\mu) \end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\lambda>0,\mu>0,\delta>0, \text{Re}[\alpha+\lambda(b_j/f_j)]>0, \text{Re}[\beta+\mu(b_j/f_j)]>0,$$

$$\text{Re}[y+\delta(b_j/f_j)]>-\tfrac{1}{2}, j=1,\ldots,m, \phi>0, |\arg z|<\pi/2\phi,$$

जहाँ ϕ (1.3) की भाँति है।

उपपत्ति

समाकल को I द्वारा अंकित करने तथा (2.1) के समाकल्य में (1.1) से मेलिन-बार्नीज समाकल के पदों में H-फलन का मान रखने पर तथा समाकलन के क्रम को उलटने पर हमें थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् निम्नलिखित फल प्राप्त होता है :

$$I=(2\pi i)^{-1}\int_L g(s)z^s(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\delta s}\left[\int_0^\infty x^{y+\delta s-1/2}(x+a)(x-b)^{-y-\delta s}dx\right]$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta+\mu s+\lambda s)\theta}(\sin\theta)^{\alpha+\lambda s-1}(\cos\theta)^{\beta+\mu s-1}d\theta\right\}ds$$

अब ज्ञात फलों[3],[5] की सहायता से दो आन्तरिक समाकलों का मान ज्ञात करने और (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर (2.1) की प्राप्ति होती है।

3. विशिष्ट दशाएँ

1. (2.1) में $\lambda=0$ लेने और गुण (1.4) का प्रयोग करने पर हमें हाल ही में राठी[6] द्वारा सिद्ध किया गया फल प्राप्त होता है।

2. (2.1) में $\delta=0$ रखने तथा (1.4) और (1.5) गुणों को व्यवहृत करने पर हमें कल्ला का फल[4] प्राप्त होता है।

3. यदि (2.1) में

(i) $\mu=-\mu,\lambda=0$

(ii) $\delta=-\delta,\lambda=0$

(iii) $\mu=-\mu,\delta=-\delta,\lambda=0$

रखें और उपयुक्त गुणों को सम्प्रयुक्त करें तो (2.2), (2.3), (2.4) फलों की प्राप्ति होती है जिन्हें हाल ही में राठी[6] ने प्राप्त किया है।

4. (2.1) में $\mu=-\lambda$ रखने तथा (1.5) एवं (1.6) गुणों को व्यवहृत करने पर निम्नलिखित रोचक फल प्राप्त होता है :

$$\int_0^x \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} x^{\gamma-1/2}\Big[(x+a)(x+b) \Big]^{-\gamma}$$

$$\times H_{p\ \ q}^{m\ \ n}\left[z (\tan\theta)^{\lambda}\left\{\frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(x+a)(x+b)}\right\}^{\delta} \middle| \begin{matrix} {}_1(a_j,e_j)_p \\ {}_1(b_j,f_j)_q \end{matrix}\right] dx\, d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{\pi} e^{1/2 i\pi\alpha}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2y}}{\Gamma(\alpha+\beta)} H_{p+2\ \ q+2}^{m+1\ \ n+2}\left[z\, e^{1/2 i\pi\lambda} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha,\lambda),(3/2-\gamma,\delta),{}_1(a_j,e_j)_p \\ (\beta,\lambda),{}_1(b_j,f_j)_q,(1-\gamma,\delta) \end{matrix}\right]$$

जहाँ

$$\lambda>0,\delta>0,\ \mathrm{Re}[\alpha+\lambda(b_j/f_j)]>0,\ \mathrm{Re}[\gamma+\delta(b_j/f_j)]>-1/2\ j=1,\ldots,m$$

$$\mathrm{Re}[\beta-\lambda(a_j-1/e_j)]>0, j=1,\ldots,n, \phi>0, |\arg z|<1/2\pi\phi,$$

जहाँ ϕ (1·3) की भाँति है।

इसी प्रकार, हमारे मुख्य समाकल (2·1) से कई विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी०एल०जे०, Composite Math., 1963, **15**, 239-341
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
3. ग्रैडस्टियेन, आई० एस० तथा राइज़िक आई० एम०, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1965, 286: 3.197 (7).
4. कल्ला, एस०एल० तथा ईडा, जी०डी०, Univ. Nac. Tucuman, Rev. Ser. A., 1973, **33**, 83-87,
5. मकरावर्ट, टी०एम०, Math. Annalean, 1961, **142**, 450-452.
6. राठी, ए०के०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1979, **22**, 11-16.
7. राठी, ए०के०, Univ. Nac. Tucuman, 1979, XXVIII, (स्वीकृत)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 265-277

समाकलों तथा प्रसारों की एक कोटि का समेकन

जी० पी० गौतम तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जनवरी 7, 1980]

सारांश

n तथा N चरों वाले दो विभिन्न A-फलनों के गुणनफल के लिए कुछ समाकल तथा प्रसार सूत्र प्राप्त किए गए हैं। अत्यन्त व्यापक प्रकृति के होने के कारण इन परिणामों में बहुत बड़ी संख्या में ज्ञात तथा नवीन परिणाम सन्निहित हैं।

Abstract

On unification of a class of integrals and expansions. *By* G. P. Gautam and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The present paper contains some integrals and expansion formulae with proper conditions of validity for the product of two different A-functions of n and N variables. These results are of a very general nature and as such include a large number of known and new results.

1. n चरों वाला A-फलन निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$$A^{m,0;((m_n,n_n))}_{p,q;((p_n,q_n))}\left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [((a_p;\alpha'_p,\ldots,\alpha_p^{(n)}));((b_q;\beta'_q,\ldots,\beta_q^{(n)}))] \\ [[((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));((d_{q_n}^{(n)},\delta_{q_n}^{(n)}))]] \end{matrix}\right]$$

$$\equiv A[x_k : k=1,\ldots,n] \equiv A(x_1,\ldots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} f(s_1,\ldots,s_n)\prod_{k=1}^{n}\{f_k(s_k)\,x_k^{s_k}\,ds_k\} \tag{1·1}$$

जहाँ (a) $f(s_1, \ldots, s_n) = \dfrac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1 - a_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_j^{(k)} s_k)}$,

$$f_k(s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{mk} \Gamma(c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{nk} \Gamma(1 - d_j^{(k)} - \delta_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=mk+1}^{pk} \Gamma(1 - c_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=nk+1}^{qk} \Gamma(d_j^{(k)} + \delta_j^{(k)} s_k)},$$

तथा रिक्त गुणनफल ($\prod_{j}^{m}$, $m<j$) को इकाई मान लिया जाता है।

(b) $m, p, q, m_k, n_k, p_k, q_k$ (प्रत्येक $k=1, \ldots, n$ के लिए) $m \leqq p$, $m_k \leqslant p_k$, $n_k, \leqslant q_k$ सहित अ-नृणात्मक संख्याएं हैं।

(c) प्रत्येक $k=1, \ldots, n$: x_k ($\neq 0$) के लिए तथा प्राचल $a_j, \alpha_j^{(k)}, b_j, \beta_j^{(k)}, c_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, d_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ सभी संकुल हैं

(d) दोहरे कोष्ठक संकेत (( )) एवं [[ ]] निम्नवत् हैं

(i) $((a_p;\ \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(n)})) \equiv (a_1; \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(n)}), \ldots, (a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(n)})$;

$((c'_{m_1}, p_1, \gamma'_{m_1}, p_1)) \equiv (c'_{m_1}, \gamma'_{m_1}), (c'_{m_1+1}, \gamma'_{m_1+1}), \ldots, (c'_{p_1}, \gamma'_{p_1})$;

(ii) $[[((c_{pn}^{(n)}, \gamma_{pn}^{(n)})); ((d_{qn}^{(n)}, \delta_{qn}^{(n)}))]]$ से n समुच्चयों

$[((c'_{p_1}, \gamma'_{p_1})); ((d'_{q_1}, \delta'_{q_1}))], \ldots, [((c_{pn}^{(n)}, \gamma_{pn}^{(n)})); ((d_{qn}^{(n)}, \delta_{qn}^{(n)}))]$,

का बोध होता है।

(e) $i = \sqrt{-1}$ तथा कंटूर L_x s_k-तल पर अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़ने पर

$\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k)$ एवं $\prod_{j=1}^{mk} \Gamma(c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} s_k)$ के पोल इसके बाईं ओर तथा

$\prod_{j=1}^{nk} \Gamma(1 - d_j^{(k)} - \delta_j^{(k)} s_k)$ के पोल इसके दाईं ओर पड़ें।

(1.1) द्वारा परिभाषित फलन संकुल s_k-तल के प्रत्येक बिन्दु x_k (प्रत्येक $k=1, \ldots, n$) के लिए) पर एक विश्लेषिक फलन का प्रतिनिधित्व करता है जिसके लिए

$$\xi_k=0,\ n_k>0,\ |\arg(\zeta_k x_k)|<\frac{\pi}{2}\eta_k \tag{1·2}$$

जहाँ
$$\xi_k=\sum_{j=1}^{p} I(a_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q} I(\beta_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{pk} I(\gamma_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{qk} I(\delta_j^{(k)}),$$

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{m} R(a_j^{(k)})-\sum_{j=m+1}^{p} R(a_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q} R(\beta_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{mk} R(\gamma_j^{(k)})$$

$$-\sum_{j=m_k+1}^{pk} R(\gamma_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{nk} R(\delta_j^{(k)})-\sum_{j=n_k+1}^{qk} R(\delta_j^{(k)}),$$

$$\zeta_k=\prod_{j=1}^{p} a_j^{(k)\,a_j^{(k)}}\ \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{(k)\,-\beta_j^{(k)}}\ \prod_{j=1}^{pk} \gamma_j^{(k)\,\gamma_j^{(k)}}\ \prod_{j=1}^{qk} \delta_j^{(k)\,-\delta_j^{(k)}}.$$

यदि $a_j^{(k)}$, $\beta_j^{(k)}$, $\gamma_j^{(k)}$, $\delta_j^{(k)}$ को वास्तविक धनात्मक मान लिया जाय तथा a_j, b_j, $c_j^{(k)}$, $d_j^{(k)}$ के स्थान पर $i-a_j$, $i-b_j$; $1-c_j(k)$, $1-d_j(k)$ लिखा जाय तो n चरों वाला A-फलन श्रीवास्तव तथा पंडा[8] के कई संकुल चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है।

एक अन्य N-चरों वाला A-फलन निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अपना श्रेणी रूप धारण करता है। यदि प्रत्येक $e=1, \ldots N$, के लिए हमें प्राप्त हो :

(i) $N_e\geqslant 1,\ \phi_{he}^{(e)}\neq 0,\ \dfrac{1-D_{j_e}^{(e)}+u_e}{\phi_{je}^{(e)}}\neq\dfrac{1-D_{h_e}^{(e)}+v_e}{\phi_{h_e}^{(e)}}$

क्योंकि $j_e\neq h_e$; j_e, $h_e=1, \ldots, N_e$; $u_e, v_e=0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $\lambda_e>0$ या $\lambda_e=0$ सहित $|y_e|<\mu_e$, $\rho_e\geqslant 0$, $\pi\,|\sigma_e|\leqslant\rho_e$, $X=0$, $Y_e>\lambda_e$, $|\arg(z_e y_e)|<\frac{\pi}{2}(Y_e-\lambda_e)$, जहाँ

$$\lambda_e=-\sum_{j=1}^{P} R(\lambda_j^{(e)})+\sum_{j=1}^{Q} R(\mu_j^{(e)})-\sum_{j=1}^{Pe} R(\theta_j^{(e)})+\sum_{j=1}^{Qe} R(\phi_j^{(e)}),$$

$$\mu_e=\prod_{j=1}^{P} |\lambda_j^{(e)}|^{-R(\lambda_j^{(e)})}\prod_{j=1}^{Q} |\mu_j^{(e)}|^{R(\mu_j^{(e)})}$$

$$\prod_{j=1}^{Pe} |\theta_j^{(e)}|^{-R(\theta_j^{(e)})}\prod_{j=1}^{Qe} |\phi_j^{(e)}|^{R(\phi_j^{(e)})},$$

$$\rho_e = \sum_{j=1}^{P} I(\lambda_j^{(e)}) \arg \lambda_j^{(e)} - \sum_{j=1}^{Q} I(\mu_j^{(e)}) \arg \mu_j^{(e)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{Pe} I(\theta_j^{(e)}) \arg \theta_j^{(e)} - \sum_{j=1}^{Qe} I(\phi_j^{(e)}) \arg \phi_j^{(e)},$$

$$\sigma_e = - \sum_{j=M+1}^{P} I(\lambda_j^{(e)}) - \sum_{j=M+1}^{Pe} I(\theta_j^{(e)}) + \sum_{j=1}^{N^e} I(\phi_j^{(e)}),$$

तथा संख्यायें X_e, Y_e, Z_e समान हैं (1·2) के ξ_k, η_k, ζ_k के। तब

$$A^{M,0;((M_N,N_N))}_{P,Q;((P_N,Q_N))} \left[\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [((A_P;\ \lambda'_P, \ldots, \lambda_P^{(N)}));\ ((B_Q;\ \mu'_Q, \ldots, \mu_Q^{(N)}))] \\ [[((C_{P_N}{}^{(N)}, \theta_{P_N}{}^{(N)}));\ ((D_{Q_N}{}^{(N)}, \phi_{Q_N}{}^{(N)}))]] \end{matrix} \right]$$

$$\equiv A'[y_e: e=1, \ldots, N]$$

$$= \prod_{e=1}^{N} \left(\sum_{h_e=1}^{Ne} \sum_{\nu_e=0}^{\infty} \psi_e\, y_e^{ze} \right) g(z_1, \ldots, z_N) \tag{1·3}$$

जहाँ
$$z_e = \frac{1 - D_{h_e}^{(e)} + \nu_e}{\phi_{h_e}^{(e)}}, \quad \psi_e = \frac{g_e(z_e)(-)^{\nu_e}}{\phi_{h_e}^{(e)}\, \nu_e\,!},$$

$$g(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\prod_{j=1}^{N} \Gamma(A_j + \sum_{e=1}^{N} \lambda_j^{(e)} z_e)}{\prod_{j=M+1}^{P} \Gamma(1 - A_j - \sum_{e=1}^{N} \lambda_j^{(e)} z_e) \prod_{j=1}^{Q} \Gamma(B_j + \sum_{e=1}^{N} \mu_j^{(e)} z_e)},$$

$$g_e(z_e) = \frac{\prod_{j=1}^{Me} \Gamma(C_j^{(e)} + \theta_j^{(e)} z_e) \prod_{j=1, j\neq h_e}^{Ne} \Gamma(1 - D_j^{(e)} - \phi_j^{(e)} z_e)}{\prod_{j=M_e+1}^{Pe} \Gamma(1 - C_j^{(e)} - \theta_j^{(e)} z_e) \prod_{j=N_e+1}^{Qe} \Gamma(D_j^{(e)} + \phi_j^{(e)} z_e)}.$$

A-फलन एक चर वाला है और निम्नवत् होता है

$$A^{m,n}_{p,q}\left[x \middle| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \alpha_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}{\prod_{m+1}^{p} \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j s)} x^s\, ds.$$

n चरों वाले A-फलन को A-फलन + एक अचर में समानीत करने वाले सूत्र आगे दिये जा रहे हैं

(i) यदि प्रत्येक $k=2, 3, \ldots, n$ के लिये : $\delta_1^{(k)}$ वास्तविक घन है तथा (1·3) में कथित प्रतिबन्ध (ii) (1·1) में आये $A(x_1, \ldots, x_n)$ के लिए सत्य उतरता है तो

$$\lim_{x_2, \ldots, x_n \to 0} A^{m,0:(m_1,1);((m_{2,n},1))}_{p,q:(p_1,q_1);((p_{2,n},q_{2,n}))}\left[\begin{matrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [((a_p;\alpha'_p,\ldots,\alpha_p^{(n)}));((b_q;\beta'_q,\ldots,\beta_q^{(n)}))] \\ [((c'_{p_1},\gamma'_{p_1}));((d'_{q_1},\delta'_{q_1}))] \\ [((c''_{p_2},\gamma''_{p_2}));(1,\delta_1''),((d''_{2,q_2},\delta''_{2,q_2}))] \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ [((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));(1,\delta_1^{(n)}),((d_{2,q_n}^{(n)},\delta_{2,q_n}^{(n)}))] \end{matrix}\right]$$

$$= \prod_{k=2}^{n}\left\{\frac{\prod\limits_{j=1}^{mk}\Gamma(c_j^{(k)})}{\prod\limits_{j=mk+1}^{pk}\Gamma(1-c_j^{(k)})\prod\limits_{j=2}^{qk}\Gamma(d_j^{(k)})}\frac{1}{\delta_1^{(k)}}\right\}$$

$$A^{m+m_1,0+n_1}_{p+p_1,q+q_1}\left[x_1\middle|\begin{matrix}((a_p,\alpha'_p)),((c'_{p_1},\gamma'_{p_1})) \\ ((b_q,\beta'_q)),((d'_{q_1},\delta'_{q_1}))\end{matrix}\right] \tag{1·4}$$

यदि (1·4) में कथित प्रतिबन्ध प्रत्येक $k=1, \ldots, n$ के लिए सत्य हों तो

$$\lim_{x_1,\ldots,x_n \to 0} A^{m,0:((m_n,1))}_{p,q:((p_n,q_n))}\left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[((a_p;\alpha'_p,\ldots,\alpha_p^{(n)}));((b_q;\beta'_q,\ldots,\beta_q^{(n)}))] \\ [[((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));(1,\delta_1^{(n)}),((d_{2,q_n}^{(n)},\delta_{2,q_n}^{(n)}))]]\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\prod\limits_{1}^{m}\Gamma(a_j)}{\prod\limits_{m+1}^{p}\Gamma(1-a_j)\prod\limits_{1}^{q}\Gamma(b_j)}\prod_{k=1}^{m}\left\{\frac{\prod\limits_{j=1}^{mk}\Gamma(c_j^{(k)})}{\prod\limits_{j=mk+1}^{pk}\Gamma(1-c_j^{(k)})\prod\limits_{j=2}^{qk}\Gamma(d_j^{(k)})}\frac{1}{\delta_1^{(k)}}\right\}$$

आगे हम एर्डेल्यी[2] के समाकलों (1), (2), (5) तथा (9) को निम्नांकित रूप में फिर से लिखेंगे

यदि $a>0$, $b\neq -1$, $R(\alpha)>-1$, $R(\sigma)>-1$ तो

$$\int_0^a \frac{t^\alpha(a-t)}{(a+bt)^{2+\alpha+\sigma}} P_u^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)dt$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+u+1)}{a(b+1)^{\alpha+1}u!} \frac{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1-\beta+\sigma)}{\Gamma(2+u+\alpha+\sigma)\Gamma(1-u-\beta+\sigma)} \tag{1·6}$$

(ii) यदि $a>0,\ b\neq-1,\ R(\rho)>-1,\ R(\beta)>-1$ तो

$$\int_0^a \frac{t^{\alpha}(a-t)^{\beta}}{(a+bt)^{2+\rho+\beta}} P_u^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right) dt$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+u+1)(-1)^{\alpha}}{a(b+1)^{1+\beta}u!} \frac{\Gamma(1+\rho)\Gamma(1-\alpha+\rho)}{\Gamma(1-u-\alpha+\rho)\Gamma(2+u+\beta+\rho)} \tag{1·7}$$

(iii) यदि $a>0,\ b\neq-1,\ R(\alpha)>-1,\ R(\beta)>-1$ तो

$$\int_0^a \frac{t^{\alpha}(a-t)^{\beta}}{(a+bt)^{2+\alpha+\beta}} P_u^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right) P_s^{(\gamma,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right) dt$$

$$= \begin{cases} 0; \text{ जब } s\neq u \\ \dfrac{1}{a(b+1)^{1+\alpha}u!} \dfrac{\Gamma(\alpha+u+1)\Gamma(\beta+u+1)}{(\alpha+\beta+2u+1)\Gamma(\alpha+\beta+u+1)}; \text{ जब } s=u \end{cases} \tag{1·8}$$

अन्त में संक्षेपण की दृष्टि से निम्नलिखित रूप वाले फलन

$$A^{m+2,0;((m_n,n_n))}_{p+2,q+2;((p_n,q_n))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n) \\ \cdot & ((a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(n)})); ((b_q; \beta'_q, \ldots, \beta_q^{(n)})), \\ \cdot & (2+u+\alpha+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; c_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-u-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)] \\ x_n & [[((c_{p_n}^{(n)}, \gamma_{p_n}^{(n)})); ((d_{q_n}^{(n)}, \delta_{q_n}^{(n)}))]] \end{array}\right]$$

को इस प्रकार संक्षिप्त किया जावेगा

$$A^{m+2,0:((\ ))}_{p+2,q+2:((\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), ((\ )); \\ \cdot & ((\ )), (2+u+\sigma+\sum_{e=1}^{N} e_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-u-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)] \\ x_n & [[((\ )); ((\ ))]] \end{array}\right]$$

2. समाकल

यहाँ जिन समाकलों का मान निकाला जायेगा उन्हें प्रमेय 1 तथा 2 के रूप में आगे व्यक्त किया जा रहा है।

प्रमेय 1

यदि (i) $a>0, b\neq-1, R(\alpha)>-1,$

(ii) $e=1, \ldots, N$ तथा $h_e=1, \ldots, N_e$ के लिए

$$R(c_e)\ R(\phi^{(e)}_{h_e})+I(c_e)\ I(\phi^{(e)}_{h_e})\geqslant 0,$$

$$R(\sigma)+\sum_{e=1}^{N} R\left[\frac{c_e(1-D^{(e)}_{he})}{\phi^{(e)}_{h_e}}\right]+\sum_{k=1}^{n}(d_k\,U_k)>-1, \text{ जहाँ}$$

$$U_k=\begin{cases} \min\limits_{\substack{1\leqslant j_k\leqslant n_k\\ 0\leqslant\mu<\infty}} R\left(\dfrac{1-d^{(k)}_{j_k}+\mu}{\delta^{(k)}_{j_k}}\right), & \text{जब } d_k>0 \\ \max\limits_{\substack{1\leqslant j_k\leqslant m_k\\ 0\leqslant\lambda<\infty}} R\left[-\left(\dfrac{c^{(k)}_{j_k}+\lambda}{\gamma^{(k)}_{j_k}}\right)\right], & \text{जब } d_k<0 \text{ तथा } m=0 \end{cases}$$

(iii) (1·2) तथा (1·3) की वैधता के प्रतिबन्ध सही उतरते हैं तब

$$\int_0^a \frac{t^a(a-t)^\sigma}{(a+bt)^{2+a+\beta}} P_u^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)$$

$$A'\left[\frac{y_e(a-t)^{c_e}}{(a+bt)^{c_e}} ; e=1, \ldots, N\right] A\left[\frac{x_k(a-t)^{d_k}}{(a+bt)^{dk}} ; k=1, \ldots, n\right] dt$$

$$=\frac{\Gamma(a+u+1)}{a(b+1)^{a+1}u\,!} \prod_{e=1}^{N}\left(\sum_{he=1}^{Ne} \sum_{v_e=0}^{\infty} \psi_e y_e^{z_e}\right) g(z_1, \ldots, z_N)$$

$$A_{p+2,q+2;\,((\ ))}^{m+2,0;\,((\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots d_n), \\ & (1-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, b_n)((\ )); \\ \cdot & ((\ )), (2+u+a+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-u-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots d_n) \\ x_n & [[((\ )); ((\ ))]] \end{array}\right]$$

प्रमेय 2

यदि प्रमेय 1 में β तथा ρ के स्थान पर क्रमश: a तथा σ रखने पर उसके प्रतिबन्ध सही उतरें तो

$$\int_0^a \frac{t^\rho(a-t)^\beta}{(a+bt)^{2+\rho+\beta}} P_u^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)$$

$$A'\left[\frac{y_e(b+1)^{c_e} t^{c_e}}{(a+bt)^{c_e}} ; e=1, \ldots, N\right] A\left[\frac{x_k(b+1)^{dk} t^{d_k}}{(a+bt)^{d_k}} : k=1, \ldots, n)\right] dt$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+u+1)(-1)^u}{a(b+1)^{\rho+1} u!} \prod_{e=1}^{N}\left(\sum_{he=1}^{Ne} \sum_{v_e=1}^{\infty} \psi_e y_e^{z_e}\right) g(z_1, \ldots, z_N)$$

$$A_{p+2,q+2;\,((\ ))}^{m+2,0;\,((\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-a+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e: b_1, \ldots d_n), ((\ )); \\ \cdot & ((\ )), (1-u-a+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (2+u+\beta+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)] \\ x_n & [[((\ )); ((\ ))]] \end{array}\right]$$

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिए (1·3) के द्वारा N चरों वाले A'-फलन को श्रेणी रूप में तथा (1·1) के द्वारा n-चरों वाले A-फलन को कंटूर समाकल रूप में अभिव्यक्त करते हैं, t-समाकल तथा संकलनों के क्रम और पुनः t-समाकल तथा n-कंटूर समाकलों के क्रम को बदलते हैं (यह परिवर्तन कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है) तथा (1·6) की सहायता से आन्तरिक t-समाकल का मान ज्ञात करते हैं तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\prod_{e=1}^{N}\left(\sum_{h_e=1}^{Ne}\sum_{\nu_e=0}^{\infty}\psi_e\, y_e^{z_e}\right) g(z_1, \ldots, z_N)\ \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_1} f(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n}\left[f_k(s_k)\, x_k^{s_k}\right]\frac{\Gamma(a-u+1)}{a(b+1)^{1+\alpha}\, u\,!}\ \frac{\Gamma\left(1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e+\sum_{k=1}^{n} d_k\, s_k\right)}{\Gamma\left(2+u+\alpha-\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e-\sum_{k=1}^{n} d_k\, s_k\right)}$$

$$\cdot\ \frac{\Gamma\left(1-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e\, z_e+\sum_{k=1}^{n} d_k s_k\right)}{\Gamma\left(1-u-\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e\, z_e+\sum_{k=1}^{n} d_k\, s_k\right)}\ \sum_{k=1}^{n}(ds_k).$$

अन्त में (1·1) की सहायता से n समाकलों की व्याख्या सांकेतिक रूप में करने पर तुरन्त ही (2·1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

इसी प्रकार फल (1·6) के स्थान पर (1·7) का उपयोग करके (2·2) को प्राप्त किया जा सकता है।

3. प्रसार सूत्र

पिछले अनुभाग के समाकल के संगत दो प्रसार प्रमेय दिए जा रहे हैं।

प्रमेय 3

यदि $R(\beta) > -1$ तथा प्रमेय 1 के प्रतिबन्ध σ को $\sigma+\beta$ द्वारा प्रतिस्थापित करने सहित सही उतरें तो

$$\frac{(a-t)^{\sigma}}{(a+bt)^{\sigma}} A'\left[\frac{y_e(a-t)^{c}}{(a+bt)^{ce}} : e=1. \ldots, N\right] A\left[\frac{x_k(a-t)^{d_k}}{(a+bt)^{d_k}} : k=1, \ldots, n\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+2s+1)\Gamma(\alpha+\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+s+1)} P_s^{(\alpha+\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)$$

$$\cdot \prod_{e=1}^{N} \left(\sum_{h_e=1}^{Ne} \sum_{\nu_e=0}^{\infty} \psi_e y_e^{z_e} \right) g(z_1, \ldots, z_N)$$

$$\cdot A^{m+2,0;((\ ))}_{p+2,q+2;((\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\sigma+\beta+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e: d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), ((\ )); ((\ )), \\ \cdot & (2+s+\alpha+\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e: d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1-s+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)] \\ x_n & [[((\ )); ((\ ))]] \end{array}\right]$$

प्रमेय 4

यदि $R(\alpha)>-1$ तथा प्रमेय 2 के प्रतिबन्ध, ρ को $\rho+\alpha$ द्वारा प्रतिस्थापित करने सहित सही उतरें तो

$$\frac{t^\rho}{(a+bt)^\rho} A'\left[\frac{y_e(b+1)^{c_e} t^{c_e}}{(a-bt)^{c_e}} : e=1, \ldots, N\right] A\left[\frac{x_k(b+1)^{d_k}\, t^{d_k}}{(a+bt)^{d_k}} : k=1, 1, \ldots, n\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+2s+1)\Gamma(\alpha+\beta+s+1)(-1)^s}{(b+1)^\rho\, \Gamma(\alpha+s+1)} P_s^{(\alpha+\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)$$

$$\cdot \prod_{e=1}^{N} \left(\sum_{h_e=1}^{Ne} \sum_{\nu_e=0}^{\infty} \psi_e y_e^{z_e} \right) g(z_1, \ldots, z_N)$$

$$A^{m+2,0;((\ ))}_{p+2,q+2;((\ ))}\left(\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\rho+\alpha+\sum_{e=1}^{N} e_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ \cdot & (1+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), ((\ )) \\ \cdot & ((\ )), (1-s+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), \\ x_n & (2+s+\alpha+\beta+\rho+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)]: \\ & [[((\ )): ((\ ))]] \end{array}\right)$$

उपपत्तियाँ

माना $0<t<a$ में

$$(3\cdot1) \text{ का वाम पक्ष } = \sum_{s=0}^{\infty} A_s P_0^{(a,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right) \tag{3·3}$$

(3·3) को

$$\frac{t^{a}(a-t)^{\beta}}{(a+bt)^{2+a+\beta}} P_u^{(a,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right),$$

से गुणा करें और इसे t के प्रति 0 से a तक समाकलित करें, दक्षिण पक्ष में समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदल दें (जो प्रदत्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध हैं), वाम पक्ष में (2·1) का और दक्षिण पक्ष में (1·8) का उपयोग करें तो हमें जो फल प्राप्त होगा वह है

$$\frac{\Gamma(a+u+1)}{a(b+1)^{1+a}\, u\,!} \prod_{e=1}^{N}\left(\sum_{h_e=1}^{Ne} \sum_{\nu_e=0}^{\infty} \psi_e y_e^{z_e}\right) g(z_1, \ldots, z_n)$$

$$A^{m+2,\ 0:((\ ))}_{p+2,q+2:((\ ))}\left[\begin{array}{c|l} x_1 & [(1+\sigma+\beta+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n) \\ \cdot & (1+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n), ((\ )):((\ )), \\ \cdot & (2+u+a+\beta+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e y_e; d_1, \ldots, d_n) \\ \cdot & (1-u+\sigma+\sum_{e=1}^{N} c_e z_e; d_1, \ldots, d_n)] \\ x_n & [[((\ )):((\ ))]] \end{array}\right]$$

$$=A_u \frac{1}{a(b+1)^{1+a}\, u!} \frac{\Gamma(a+u+1)\Gamma(\beta+u+1)}{(a+\beta+2u+1)\Gamma(a+\beta+u+1)} \tag{3·4}$$

(3·4) में u के स्थान पर s रखने पर A_s प्राप्त होता है जो (3·3) के साथ तुरन्त ही (3·1) प्रदान करता है।

इसी विधि से (2·1) के बजाय (2·2) का उपयोग करके प्रमेय 4 को भी स्थापित किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशाएँ : ज्ञात तथा नवीन दोनों ही : अगली पंक्तियों में हम (2·1) तथा (3·1) की कई तरह की विशिष्ट दशाओं को प्राप्त करने की विधि दे रहे हैं। इसी का अनुसरण करके (2·2) तथा (3·2) की विशिष्ट दशयें भी ज्ञात की जा सकती हैं।

(I) प्रथम प्रकार की विशिष्ट दशायें या तो $a=1$ या $b=0$ अथवा दोनों रखकर प्राप्त की जा सकती हैं ,

(II) द्वितीय प्रकार की विशिष्ट दशायें प्राप्त करने के लिये जैकोबी बहुपद का विशिष्टीकरण करते हैं। α तथा β की $-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ या 0 या $\nu-\frac{1}{2}$ जिस रूप में लिया जाता है उसी के अनुसार हमें समाकल तथा प्रसार सूत्र प्राप्त होते हैं जिनमें चेबीशेफ बहुपद को प्रथम कोटि या द्वितीय कोटि या लेगेण्ड्र बहुपद या गेगेनबायर बहुपद सन्निहित होते हैं।

(III) तृतीय प्रकार की विशिष्ट दशायें प्राप्त करने के लिए N-चरों वाले A'-फलन को सार्वीकृत लारिसेला फलन[7], कैम्पे द फेरी फलन[1] A'-फलन (1·4 के प्रयोग से), फाक्स H-फलन[3], माइजर का G-फलन[6] तथा एक अचर (1·5 के प्रयोग से) में विशेषीकृत करते हैं। उदाहरणार्थ (1·4) तथा (1·5) समानयन सूत्रों के उपयोग से प्रसार सूत्र (3·1) निम्नलिखित प्रदान करता है

$$\text{(i)}\quad \frac{(a-t)^{\sigma}}{(a+bt)^{\sigma}}\, A\left[\frac{x_k(a-t)^{d_k}}{(a+bt)^{d_k}} : k=1, \ldots, n\right]$$

$$.\, A'^{\,M+M_1, N_1}_{\,P+P_1, Q+Q_1}\left[\frac{y_1(a-t)^{c_1}}{(a+bt)^{c_1}}\,\middle|\, \begin{matrix}((A_P, \lambda'_P)), ((C'_{P_1}, \theta'_{P_1}))\\ ((B_Q, \mu'_Q)), ((D'_{Q_1}, \phi_{Q_1}))\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+2s+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+s+1)} \sum_{h_1=1}^{N_1} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} g(z_1, 0, \ldots, 0)\psi'_1 y_1^{z_1}$$

$$.\, P_s^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right) A^{m+2,0:((\ ))}_{p+2,q+2:((\ ))}\left[\begin{matrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{matrix}\,\middle|\, \begin{matrix}[(1+\sigma+\beta+c_1z_1; d_1, \ldots, d_n),\\ (1+\sigma+c_1z_1; d_1, \ldots, d_n), ((\ ));\\ ((\ )), (1-s+\sigma+c_1z_1; d_1, \ldots, d_n)\\ (2+s+\alpha+\beta+\sigma+c_1z_1; d_1, \ldots, d_n)]\\ [[((\ )) : ((\ ))]]\end{matrix}\right]$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{(a-t)^{\sigma}}{(a+bt)^{\sigma}}\, A\left[\frac{x_k(a-t)^{k_k}}{(a+bt)^{d_k}} : k=1, \ldots, n\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+2s+1)\Gamma(\alpha+\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+s+1)}\, P_s^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{a-bt-2t}{a+bt}\right)$$

$$.\, A^{m+2,0:((\ ))}_{p+2,q+2:((\ ))}\left[\begin{matrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{matrix}\,\middle|\, \begin{matrix}[(1+\sigma+\beta; d_1, \ldots, d_n), (1+\sigma; d_1, \ldots, d_n),\\ ((\ )); ((\ )), (1-s+\sigma; d_1, \ldots, d_n),\\ (2+s+\alpha+\beta+\sigma; d_1, \ldots, d_n)]: [[((\ )); ((\ ))]]\end{matrix}\right]$$

(IV) इस प्रकार की विशिष्ट दशायें n चरों वाले A-फलन को एक-दो-तीन तथा n चरों वाले G तथा H प्रकार के फलनों में तथा A-फलन (1·4 के प्रयोग से) तथा एक अचर (1·5 के प्रयोग से) में भी समानीत करके प्राप्त की जा सकती हैं।

(V) विशिष्ट दशाओं के उपर्युक्त चार प्रकारों में वर्गीकृत करने का लाभ यह है कि इनमें से चाहे जितने प्रकारों को सम्मिलित करके और अधिक मिश्रित प्रकार प्राप्त किये जा सकते है। उदाहरणार्थ

$$(1-t)^{\sigma} \sigma^{m+m_1,n_1}_{p+p_1,q+q_1}\left[x_1(1-t)^{d_1}\Big|\begin{matrix}((a_p,\alpha'_p)),((c'_{p_1},\gamma'_{p_1}))\\((b_q,\beta'_q)),((d'_{q_1},\delta'_{q_1}))\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2s\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\;T_s(1-2t)\;A^{m+m_1+2,n_1}_{p+p_1+2,q+q_1+2}\left[x_1\;\begin{matrix}[(\sigma-\frac{1}{2},d_1),(1+\sigma,d_1),\\((c'_{p_1},\gamma'_{p_1})),((a_p,\alpha'_p))]\\[((d'_{q_1},\delta'_{q_1})),((b_q,\beta'_q)),\\[(1-s+\sigma,d_1),(1+s+\sigma,d_1)]\end{matrix}\right]$$

जहाँ $T_s(1-2t)$ प्रथम प्रकार का चेबीशेफ बहुपद है।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्पे द फेरी, एम० जे०, Fonctions hypergéométriques et hypersphèrique. *Polynomes d' Hermite*, *Gauthier- Villars*, 1926.
2. ऐर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms. भाग II, **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954.
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98** 395-429.
4. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, *Revista Matematica*, *Tucuman*. (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)
5. वही, (प्रकाशनार्थ प्रेषित)
6. माइजर, सी० एस०, *Nederl. Acad. Wetensch. Proc.*, 1941, **44**, 1062-1070.
7. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा दौस्त, एम० सी०, *Nederl. Acad. Wetench. Proc.* 1969, Ser. *A* **72**, No. 5, Indag.Math. **31**, 449-457.
8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा आर०, *J. Reine angew Maths.*, 1976, 283/284, 265-274

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 279-283

सार्वीकृत बैटमैन के फलन वाले संवलयी परिवर्तन पर कुछ प्रमेय

एच०एल० गुप्ता
राजकीय इंजीनियरिंग एवं प्रौद्योगिक महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—नवम्बर 20, 1980]

सारांश

सार्वीकृत बेटमैन के फलन वाले संवलयी परिवर्त पर कुछ प्रमेय प्राप्त किये गए हैं।

Abstract

Some theorems on convolution transform involving generalized Bateman function. *By* Dr. H.L. Gupta, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur.

Some theorems on convolution transform involving generalized Bateman function have been obtained.

1. भूमिका

रूसिया[6] एवं गुप्ता[3,4] ने एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन दिया है। जिसमें बेटमैन का फलन निहित है। भारतीय[1] ने सार्वीकृत बेटमैन के फलन $\overset{2l}{K}_{2n}(x/2)$ वाले एक समाकल समीकरण को हल किया है। जोशी[5] ने कुछ प्रमेय समाकल समीकरण

$$\int_0^t \overset{2l}{K}_{2n}\{a(t-u)\}\, g(u)du = f(t) \tag{1.1}$$

के प्रतिलोमन पर प्राप्त किये हैं।

इस शोधपत्र में समीकरण (1.1) के प्रतिलोमन पर भारतीय[1] एवं जोशी[5] से भिन्न कुछ अन्य प्रमेय प्राप्त किये हैं। हम उनकी विशिष्ट दशाओं पर भी विचार करेंगे।

2. उपपत्ति के लिए आवश्यक फल

लैपलास परिवर्त

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \; Re\, p > 0,$$

को $F(p) \doteq f(t)$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे। (2.1)

एर्डेल्यी [2, p. 129, p. 131, p. 175, p. 144] से हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी।

$$p^n F(p) \doteq f^{(n)}(t), \text{ यदि } f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0 \tag{2.2}$$

$$F_1(p)\,.\,F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(u)\,.\,f_2(t-u)du \tag{2.3}$$

जहाँ $F_1(p) \doteq f_1(t)$ और $F_2(p) \doteq f_2(t)$.

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n)\,!}\cdot\frac{(p-K-\lambda)^n}{(p-\lambda)^{\alpha+n+1}} \doteq t^\alpha e^{\lambda t} L_n^{\alpha}\{Kt\} \tag{2.4}$$

$Re\ \alpha > -1,\ Re(p-\lambda) > 0$

$$\frac{\Gamma(n)}{(p+a)^n} \doteq t^{n-1} e^{at} \tag{2.5}$$

निम्न ज्ञात फलों का भी हम उपयोग करेंगे।

$$\frac{(-1)^{n-l-1}(2a)^{2l+1}(p-a)^{n-l-1}}{(p+a)^{n+l+1}} \doteq K_{2n}^{2l}(at) \tag{2.6}$$

जहाँ $K_{2n}^{2l}(at)$ सार्वीकृत बेटमैन फलन है।

$$(D-a)^n f(x) = e^{ax} D^n\{e^{-ax} f(x)\} \tag{2.7}$$

3. प्रमेय 1: माना कि

(i) n तथा l धन पूर्णांक हैं जिसमें शून्य सम्मिलित है।

(ii) $f^{(2l+3)}(t)$ खण्डशः संतत है यदि $0 \leqslant t < \infty$

(iii) $f^{(m)}(0)=0,\ 0 \leqslant m \leqslant 2l+2$ के लिए।

तो समीकरण (1.1) का हल होगा।

$$g(t) = A\int_0^t e^{a(t-u)} L_{n+l+1}\{2a(u-t)\}\,.\,(D-a)^{2l+3} f(u)du \tag{3.1}$$

जबकि

$$A = \frac{(-1)^{n-l-1}}{(2a)^{2l+1}},\quad D \equiv \frac{d}{du} \text{ तथा } L_{n+l+1} \text{ लागेर बहुपदी है।}$$

उपपत्ति :

समीकरण (1.1) में (2.3) को व्यवहृत करने पर तथा (2.6) का उपयोग करने पर हमें

$$G(p)=A\frac{(p+a)^{n+l+1}}{(p-a)^{n-l-1}}F(p) \tag{3.2}$$

प्राप्त होगा।

पदों को पुनर्व्यस्थित करने पर

$$G(p)=A\frac{(p+a)^{n+l+1}}{(p-a)^{n+l+2}}\cdot(p-a)^{2l+3}F(p) \tag{3.3}$$

(3.3) के दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लैपलास परिवर्त लेने पर तथा (2.2) और (2.4) का सम्प्रयोग करने पर हमें (1.1) का हल (3.1) के रूप में प्राप्त होगा।

हल (3.1) जोशी[5] के प्रमेय 2 एवं 3 से भिन्न है यद्यपि प्रतिबन्ध वही हैं परन्तु यहाँ $n>l$ प्रतिबन्ध आवश्यक नहीं है।

विशिष्ट दशा

यदि (1.1) तथा (3.1) में n के स्थान पर $(n+1)$ लें और $l=0$, $a=1$ लें तो हमें गुप्ता[4] का प्रमेय 1 प्राप्त होगा।

प्रमेय 2

प्रमेय 1 के ही प्रतिबन्धों में (1.1) का हल निम्न रूप में भी दे सकते हैं।

$$g(t)=A\int_0^t e^{a(t-u)}L_n\{2a(u-t)\}\cdot(D+a)^{l+1}\cdot(D-a)^{l+2}f(u)du \tag{3.4}$$

इसे उपरोक्तानुसार ही सिद्ध किया जा सकता है।

विशिष्ट दशा

यदि (1.1) तथा (3.4) में $l=0$, $a=1$ लें तथा n को $(n+1)$ से प्रतिस्थापित करें तो हमें गुप्ता[4] का प्रमेय 2 प्राप्त होगा।

प्रमेय 3 : यदि

(i) n तथा l धनपूर्णांक हैं जिसमें शून्य सम्मिलित है

(ii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^{2l+2}\{e^{-at}f(t)\}$

खण्डशः संतत है यदि $0\leqslant t<\infty$

(iii) $f^{(m)}(0)=0,\ 0\leqslant m\leqslant 2l+1$

तो (1.1) का हल होगा

$$g(t)=Ae^{at}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2l+2}\{e^{-at}f(t)\}$$

$$+2aAe^{at}\int_0^t \overset{(1)}{L}_{n+l}\{2a(u-t)\}\left(\frac{d}{du}\right)^{2l+2}\{e^{-au}f(u)\}du \tag{3.5}$$

उपपत्ति

(3.2) के पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=A\left(1+\frac{2a}{p-a}\right)^{n+l+1}.(p-a)^{2l+2}F(p) \tag{3.6}$$

(2.5) का प्रयोग करने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$\left(1+\frac{2a}{p-a}\right)^{n+l+1}=1+L\left\{e^{at}\sum_{r=1}^{n+l+1}\binom{n+l+1}{r}(2a)^r\frac{t^{r-1}}{r-1!}\right\}$$

$$=1+L\{e^{at}2a(n+l+1)\ {}_1F_1\{-n-l;\ 2;\ -2at]\}$$

$$=1+L\left\{2ae^{at}\overset{(1)}{L}_{n+l}(-2at)\right\} \tag{3.7}$$

(3.7) का (3.6) में सम्प्रयोग करने के बाद व्युत्क्रम लैपलास परिवर्त लेने पर हमें (2.7) के प्रकाश में (1.1) का हल (3.5) के रूप में प्राप्त होगा ।

विशिष्ट दशा

यदि (1.1) एवं (3.5) में $l=0,\ a=1$ लें तथा n को $(n+1)$ से प्रतिस्थापित करें तो हमें गुप्ता[4] का प्रमेय 3 प्राप्त होगा ।

प्रमेय 4

यदि

(i) n एवं l घन पूर्णांक हैं जिसमें शून्य सम्मिलित है ।

(ii) $f^{(2l+2)}(t)$ खण्डशः संतत है यदि $0\leqslant t<\infty$,

(iii) $f^{(m)}(0)=0,\ 0\leqslant m\leqslant 2l+1$

के लिये, तो (1.1) का हल निम्न रूप में होगा ।

$$g(t)=A\left(\frac{d}{dt}+a\right)^{l+1}\left(\frac{d}{dt}-a\right)^{l+1}f(t)$$

$$+2aA\int_0^t e^{a(t-u)}\,.\,L_{n-1}^{(1)}\{2a(u-t)\}(D^2-a^2)^{l+1}f(u)du \tag{3.8}$$

उपपत्ति : (3.2) को निम्न रूप में पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=A\left(1+\frac{2a}{p-a}\right)^n(p+a)^{l+1}\,.\,(p-a)^{l+1}F(p) \tag{3.9}$$

प्रमेय 3 में दर्शाये अनुसार ही हम प्राप्त कर सकते हैं ।

$$\left(1+\frac{2a}{p-a}\right)^n=1+L\left\{2ae^{at}L_{n-1}^{(1)}(-2at)\right\} \tag{3.10}$$

(3.10) का (3.9) में सम्प्रयोग करने एवं व्युत्क्रम लैपलास परिवर्त लेने पर हमें (3.8) प्राप्त होगा ।

विशिष्ट दशा

यदि $l=0$, $a=1$ लें तथा n को $(n+1)$ से प्रतिस्थापित करें तो हमें गुप्ता[4] का प्रमेय 4 प्राप्त होगा ।

निर्देश

1. भारतीय, पी०एल० , **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०** न्यू सिरीज, 1964, **28** (3-4), 163
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, 1954, भाग I, मैकग्राहिल
3. गुप्ता, एच०एल०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 115-119
4. गुप्ता, एच०एल०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1980, **23**, (2), 77-81
5. जोशी, बी०के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 319
6. रूसिया, के०सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इण्डिया**, 1967, **37** (1), 67-70

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 285-290

दो चरों वाले बहुपदियों के लिए एकैकी जनक फलन

सी०के० दवे

गणित विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—जून 1, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सरन के प्रमेय को दो चरों वाले बहुपदियों के लिये विस्तार देना है। इस प्रमेय की सहायता से ऐपेल के बहुपदियों के लिये दो जनक फलन प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

On bilinear generating functions for polynomials of two variables. *By* C.K. Dave, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

The object of this paper is to extend this theorem for polynomials of two variables. With the help of this theorem we obtain two generating functions for Appell's Polynomials.

The following theorem was proved by S. Saran

If $$f_n(x)=\mu(n)G(x)\,D^n\{g(x)\}$$

where $g(x)$ and $G(x)$ are independent of n, and

$$F(x,\ t)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m f_m(x)$$

then

$$\frac{G(x)F(x-t,\ ty)}{G(x-t)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-t)^r}{\mu(r)r!}\,b_r(y)\,f_r(x)$$

where

$$b_r(y)=\sum_{m=0}^{r}(-r)m\mu(m)a_{m}y^{m}.$$

1. प्रमेय

यदि

$$fm, n(x, y)=\mu(m,n)\ G(x,y)\ D_x^m\ D_y^m\,[g(x, y)] \tag{1.1}$$

जहाँ $g(x, y)$ तथा $G(x, y)$ m तथा n से स्वतन्त्र हैं और

$$F(x, y, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}t^{m+n} fm, n(x, y) \tag{1.2}$$

तो

$$\frac{G(x, y)F(x-t, y-t, zt)}{G(x-t, y-t)}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-t)^{r+s}}{\mu(r, s)r!\,s!}\,b_{r,s}(z)fr,s(x, y) \tag{1.3}$$

जहाँ

$$b_{r,s}(z)=\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{s}(-r)m(-s)_n\mu(m, n)a_{m,n}\,.\,z^{m+n}$$

2. प्रमेय की उपपत्ति

(1.2) में t के स्थान पर t_z लिखने तथा (1.1) का उपयोग करने पर

$$F(x, y, tz)=\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(tz)^{m+n} f_{m,n}(x, y)$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}\ t^{m+n}z^{m+n}\mu\ (m, n)\ G(x, y)\ Dx^m\ Dy^n\ [g(x, y))].$$

$$[G(x, y)]^{-1}\ F(x, y, t, z)=\sum_{m,n=0}^{r} a_{m,n}t^{m+n}z^{m+n}\mu(m, n)Dx^mDy^n[(g(x, y)]. \tag{2.1}$$

अब

$$e^{-t(Dx+Dy)}f(x, y)=f(x-t,\ y-t)\ \text{जहाँ}\ D_x=\frac{\partial}{\partial x}\,Dy=\frac{\partial}{\partial y}$$

(2.1) के दोनों पक्षों में आपरेटर $e^{-t(Dx+Dy)}$ व्यवहृत करने पर

$$\frac{F(x-t, y-t\ tz)}{G(x-t, y-t)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\ t^{m+n}\ z^{m+n}\ \mu(m, n)\ e^{-t(Dx+Dy)}\ Dx^mDy^n[g(x, y)].$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}\, t^{m+n} z^{m+n} \mu(m,n) \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-t\,Dx)^r (-t\,Dy)^s}{r!\, s!} Dx^m Dy^n [g(x,y)]$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}\, z^{m+n} \mu(m,n) \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}\, t^{m+r+n+s}}{r!\, s!} Dx^{m+r} Dy^{n+s} [g(x,y)]$$

$$=\sum_{r=0}^{s} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{s} \frac{a_{m,n}\, z^{m+n} \mu(m,n) (-1)^{r-s-m-n}\, t^{r+s}\, Dx^r Dy^s [g(x,y)]}{(r-m)!\,(s-n)!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{s} \frac{a_{m,n}\, z^{m+n} \mu(m,n) (-r)\, m(-s)\, n(-t)^{r+s}\, Dx^r Dy^s [g(x\ y)]}{r!\, s!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^{r+s}}{r!\, s!} Dx^r Dy^s [g(x,y)] \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{s} a_{m,n} (-r)\, m(-s)\, n\mu(m,n)\, z^{m+n}$$

(1.1) का उपयोग करने पर

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^{r+s}}{r!\, s!} \frac{f_{r,s}(x,y)}{\mu(r,s)\, G(x,y)} \sum_{m=n}^{r} \sum_{n=0}^{s} a_{m,n} (-r)_m (-s)_n \mu(m,n)\, z^{m+n}$$

$$\therefore \quad \frac{F(x-t,\, y-t,\, tz)\, G(x,y)}{G(x-t,\, y-t)} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^{r+s} f_{r,s}(x,y)}{r!\, s!\, \mu(r,s)} b_{r,s}(z).$$

$$\therefore \quad \frac{G(x,y)\, F(x-t,\, y-t,\, tz)}{G(x-t,\, y-t)} = \sum_{r=s}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^{r+s}}{r!\, s!\, \mu(r,s)} b_{r,s}(z) f_{r,s}(x,y). \tag{2.2}$$

3. ऐपेल के बहुपदी $F_{mn}(\gamma, \gamma', x, y)$ के हेतु जनक फलन

हमें ज्ञात है कि [4, page 245(2)]

$$\frac{x^{1-\gamma}\, y^{1-\gamma'}}{(\gamma)\, m(\gamma')n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1}\, y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n}]$$
$$=F_2,\ (-m-n;\ \gamma+m,\ \gamma'+n,\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) \tag{3.1}$$

(1.1) तथा (3.1) की तुलना करने पर

$$g(x,y)=x^{\gamma+m-1}\, y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}$$

$$G(x,y)=x^{1-\gamma}\, y^{1-\gamma'},\ \mu(m,n)=\frac{1}{(\gamma)m\,(\gamma')n}$$

$fm,\, n(x,y)=F_2(-m-n;\ \gamma+m,\ \gamma'+n,\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y)$ माना $a_{m,n}=\dfrac{(c)m+n}{m!\, n!}$

(1.2) से हमें प्राप्त है

$$F(x, y, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n\, t^{m+n}}{m!\, n!}F_2(-m-n; \gamma+m\,.\,\gamma'+n.\,\gamma, \gamma'; (x, y).$$

अब (2.2) से

$$\frac{x^{1-\gamma}\, y^{1-\gamma'}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n\, z^{m+n}\, t^{m+n}}{m!\, n!}F_2(-m-n; \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma'; x-tz, y-tz)}{(x-t)^{1-\gamma}\,(y-t)^{1-\gamma'}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-t)^{r+s}\,(\gamma)\, r(\gamma')s}{r!\, s!}F_2(c; -r, -s; \gamma, \gamma'; z, z)$$
$$\times F_2(-r-s; \gamma+r, \gamma'+s, \gamma, \gamma'; x, y)$$

$$\therefore\quad x^{1-\gamma}\, y^{1-\gamma'}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n\, z^{m+n}\, t^{m+n}}{m!\, n!}F_{mn}(\gamma, \gamma', x-tz, y-tz)$$

$$=(x-t)^{1-\gamma}\,(y-t)^{1-\gamma'}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}\, t^{r+s}\,(\gamma)r\,(\gamma')s}{r!\, s!}$$
$$\times F_2(c; -r; -s; \gamma, \gamma'; z, z)\times F_{mn}(\gamma, \gamma', x, y).$$

$$\therefore\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n\, z^{m+n}\, t^{m+n}}{m!\, n!}F_{mn}(\gamma, \gamma', x-tz, y-tz)$$

$$=(1-t/x)^{1-\gamma}\,(1-t/y)^{1-\gamma'}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}\, t^{\gamma+s}\,(\gamma)_r(\gamma')s}{r!\, s!}$$
$$\times F_2(c; -r, -s; \gamma, \gamma'; z, z)\times F_{mn}(\gamma, \gamma'\, x, y) \tag{3.2}$$

हमें यह भी प्राप्त है [5, p. 270 (4)] कि

$$F_{mn}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)=\frac{(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\, y^{1-\gamma'}\, x^{1-\gamma}\,\partial^{m+n}}{(\gamma)m\,(\gamma')n\,\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}\, y^{\gamma'+n-1}$$
$$\times(1-x-y)^{\alpha+n+n-\gamma-\gamma'}]$$

$$=(1-x-y)^{m+n}F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, -m, -n, \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right) \tag{3.3}$$

(1.1) तथा (3.1) की तुलना करने पर

$$g(x, y)=x^{\gamma+m-1}\, y^{\gamma'+n-1}\,(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}$$

$$G(x, y)=(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\, x^{1-\gamma}\, y^{1-\gamma'},\ \mu(m, n)=\frac{1}{(\gamma)m(\gamma')n}$$

$$fm,\ a(x, y)=(1-x-y)^{m+n}\ F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n,\ -m,\ -n,\ \gamma,\ \gamma';\ \frac{x}{x+y-1},\ \times\ \frac{y}{x+y-1}\right)$$

माना

$$a_{m,\,n}=\frac{(c)m+n}{m!\ n!},$$

तो (1.2) से हमें निम्न फल प्राप्त होगा

$$\mathscr{F}(x, y, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+nt^{m+n}}{m!\ n!}(1-x-y)^{m+n}\ F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n,\ -m,\ -n,\ \gamma,\ \gamma';\ \frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\right)$$

अब (2.2) से

$$\frac{(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\ x^{1-\gamma}\ y^{1-\gamma'}}{[1-(x-t)-(y-t)]^{\gamma+\gamma'-\alpha}(x-t)^{1-\gamma}(y-t)^{1-\gamma'}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n}{m!\ n!}z^{m+n}\ t^{m+n}$$

$$\times(1-x-y+2t)^{m+n}\ F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n,\ -m,\ -n,\ \gamma,\ \gamma';\ \frac{x-t}{x+y-2t-1},\ \times\ \frac{y-t}{x+y-2t-1}\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}\ t^{r+s}\ (\gamma)_r\ (\gamma')_s}{r!\ s!}(1-x-y)^{r+s}\ F_2\ (c;\ -r,\ -s;\ \gamma,\ \gamma';\ z,\ z)$$

$$\times F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-r-s,\ -r,\ -s,\ \gamma,\ \gamma';\ \frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\right)$$

$$\therefore\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)m+n\ z^{m+n}\ t^{m+n}}{m!\ n!}\mathscr{F}_{mn}\ (\alpha,\ \gamma,\ \gamma',\ x-t,\ y-t)$$

$$=(1-t/x)^{1-\gamma}\ (1-t/y)^{1-\gamma'}\left(1+\frac{2t}{1-x-y}\right)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}\ t^{r+s}(\gamma)_r\ (\gamma')_s}{r!\ s!}$$

$$\times F_2(c;\ -r-s;\ \gamma,\ \gamma';\ Z,\ Z)\ \mathscr{F}_{rs}\ (\alpha,\ \gamma,\ \gamma',\ x,\ y)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर०एन० जैन का आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्पे द फेरी, जे०, Functions Hypergeometriques et Hyperspheriques, पेरिस, 1926

2. सरन, एस०, **पैसिफिक जर्नल मैथ०**, 1970, **35**, 783-786

3. रेनविले, ई०डी०, Special Functions, न्यूयार्क, 1960

4. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, न्यूयार्क, 1953

5. वही, Higher Transcendental Functions, भाग 2, 1953

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1981, Pages 291-300

सार्वीकृत व्हिटेकर तथा हैंकेल परिवर्तों के लिए समाकल निरूपण

वाई० एन० प्रसाद तथा ए० के० सिंह
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालॉजी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त–जुलाई 3, 1980]

सारांश

सार्वीकृत व्हिटेकर एवं हैंकेल परिवर्तों के विभिन्न समाकल निरूपण प्रस्तुत किये गये हैं और उदाहरण दिये गये हैं।

Abstract

Integral representation for generalized Whittaker and Hankel transforms. *By* Y.N. Prasad and A.K. Singh, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the introductory section of the present paper generalisations of Whittaker transform, Laplace transform, and Hankel transform have been given, involving a new H-function of a γ variables as kernels. Section 2, the central theme of the paper, deals with various integral representations for the generalized Whittaker and Hankel transforms. Illustrative examples have also been included.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत अध्ययन में सार्वीकृत व्हिटेकर परिवर्त को निम्नलिखित रूप में परिभाषित एवं अंकित किया गया है :

$$\phi(s)W\text{-}\Omega[f(x)] = \int_0^\infty (sx)^{\rho-1} e^{-1/2sx}\, W_{k,m}(sx)\, H^{0,0:0:}_{p,q:\mathbf{p}}$$

$$\begin{matrix}(M',N');\ldots;(M^{(\gamma)},N^{(\gamma)}) \\ [P',Q'];\ldots;[P^{(\gamma)},Q^{(\gamma)}]\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \left\{\left(a_p;\left(\alpha_p^{i}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\}: \\ \left\{\left(b_q;\left(\beta_q^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\}:\left\{\left(l_{\mathbf{p}};\left(U_{\mathbf{p}}^{(i)} f_p^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\} \end{matrix} \right.$$

$$\left\{\left(c'_{P'},\gamma'_{P'}\right)\right\};\ldots;\left\{\left(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(\gamma)}_{P^{(\gamma)}}\right\}\right. \atop \left\{\left(d'_{Q'},\delta'_{Q'}\right)\right\};\ldots;\left\{\left(d^{(\gamma)}_{Q^{(\gamma)}},\delta^{(\gamma)}_{Q^{(\gamma)}}\right)\right\} \left| z_1(sx)^{\mu_1},\ldots,z_r(sx)^{\mu_r}\right] f(x)dx, \quad (1.1)$$

जहाँ $\mathrm{Re}(s)>0, \mu_i>0 (i=1,\ldots,r), x\neq 0$ तथा ρ एक संकुल संख्या है। समाकल्य (1.1) में प्रयुक्त γ चरों के H-फलन को श्रीवास्तव तथा पाण्डेय[6] के अनुरूप निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$H^{0,n:0:(M',N');\ldots(M^{(\gamma)},N^{(\gamma)})}_{p,q:|b:[P',Q'];\ldots;[P^{(\gamma)},Q^{(\gamma)}]}\left[\begin{array}{l}\left\{\left(a_p;\left(\alpha^{(i)}_p\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\} \\ \left\{'b_q;\left(\beta^{(i)}_q\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\}\left\{\left(\mathbf{p};\left(U^{(i)}_{b|}\ f^{(i)}_p\right)_{i=1\cdots r}\right)\right\}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\left(c'_{P'},\gamma'_{P'}\right)\right\};\ldots;\left\{\left(c^{(\gamma)}_{P^{(\gamma)}},\gamma^{(\gamma)}_{P^{(\gamma)}}\right)\right\} \\ \left\{\left(d'_{Q'},\delta'_{Q'}\right)\right\};\ldots;\left\{\left(d^{(\gamma)}_{Q^{(\gamma)}},\delta^{(\gamma)}_{Q^{(\gamma)}}\right)\right\}\end{array}\right| x_1,\ldots,x_r\Bigg]$$

$$=(2\pi\omega)^{-r}\int_{L1}\ldots\int_{Lr}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\,x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r}ds_1\ldots ds_r, \quad (1.2)$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{M^{(i)}}\Gamma\left(d^{(i)}_j-\delta^{(i)}_j s_i\right)\prod\limits_{j=1}^{N^{(i)}}\Gamma\left(1-c^{(i)}_j+\gamma^{(i)}_j s_i\right)}{\prod\limits_{j=M^{(1)}+1}^{Q^{(i)}}\Gamma\left(1-d^{(i)}_j+\delta^{(i)}_j s_i\right)\prod\limits_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}\Gamma\left(c^{(i)}_j-\gamma^{(i)}_j s_i\right)} \quad (1.3)$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+\prod\limits_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_j s_i\right)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+\sum\limits_{i=1}^{r}\beta^{(i)}_j s_i\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_j s_i\right)\prod\limits_{j=1}^{|p}\Gamma\left(l_j+\sum\limits_{i=1}^{r}U^{(i)}_j f^{(i)}_j s_i\right)} \quad (1.4)$$

यहाँ तथा आगे सर्वत्र (i) शीर्षाङ्कों से डैशों की संख्या सूचित होती है यथा $b^{(1)}=b'$, $b^{(2)}=b''$,

इत्यादि $\omega=\sqrt{-1}$; $\{(a_p;\left(\alpha^{(i)}_p\right)_{i=1,\ldots,r}),$

[6, (1976)] की भाँति $\alpha\left(a_p;a_p,\ldots,\alpha^{(r)}_p\right)$ के रूप में अंकित है जिससे p प्राचलों का अनुक्रम

$$\left(a_1;\left(\alpha^{(i)}_1\ i=1,\ldots,r\right),\ldots,\left(a_p;\left(\alpha^{(i)}_p\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right),$$

सूचित होता है। रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, (1.4) में आये l_j तथा $f_j^{(i)}$ क्रमशः संकुल एवं धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं। इसमें सन्निहित $U_j^{(i)}$ इकाई फलन है जिसे निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$U_j^{(i)} = \begin{cases} +1, \text{ यदि पद } f_j^{(i)} s_i \text{ के } J \text{ वें गुणक का चिह्न धन है} \\ -1 \text{ यदि पद } f_j^{(i)} s_i \text{ के } J \text{ वें गुणक का चिह्न ऋण है।} \end{cases}$$

$$i=1, \ldots, r, j=1, \ldots, p.$$

अधिक स्पष्ट करने के लिए माना कि कोई j (मान लो 2) को $\psi(s_1, \ldots s_r)$ के अंश में गुणक है वह

$$\Gamma(7+5s_1+10s_2+\ldots+5(r-1)s_{r-1}-57s_r),$$

के रूप में है तो स्पष्ट ही

$$l_2=7, f_2^{(i)}=5i$$

क्योंकि

$$i=1, \ldots, r-1, f_2^{(r)}=57,$$

तथा

$$U_2^{(i)} = \begin{cases} +1 \text{ जब } i=1, \ldots, r-1, \\ -1 \text{ जब } i=r. \end{cases}$$

p एक अ-नृण पूर्णाङ्क है जो $\psi(s_1, \ldots, s_r)$ के अंश में मिश्रित संकेत पदों के Γ फलनों **p** की संख्या व्यक्त करता है। यह ध्यान देना महत्वपूर्ण होगा कि **p**=8 से यह नहीं माना जाना चाहिए कि $r=4$ (अर्थात् हमारा H-फलन 4 चरों वाला है)। इससे इतना ही सूचित होता है कि $\psi(s_1, \ldots, s_r)$ के अंश में केवल 8 Γ फलन हैं जिनके मिश्रित संकेत पद हैं। विशेष रूप से **p**=0 से ऐसे गुणकों की अनुपस्थिति पुष्ट होती है।

संकुल s_i-तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है जो अपने दंतुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक विस्तीर्ण है, जिससे आश्वस्त रहा जा सकता है कि ये कंटूर ($i=1, \ldots, r$) न केवल समाकल्य की किसी विचित्रता को ही नहीं काटते हैं वरन् दो प्रकार के Γ फलनों के अनावश्क विचित्रताओं के सेटों को पृथक भी करते हैं। विभिन्न प्राचलों को इस प्रकार सीमित किया जाता है कि ये समस्त पोल सरल हों और इनमें से कोई भी $x_i=0 (i=1, \ldots, r)$ विन्दुओं पर नहीं मिले। बहुगुणित कंटूर समाकल (1.2) परम अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x_i| < \tfrac{1}{2}\pi V_i, \; i=1, \ldots, r; \tag{1.5}$$

जहाँ

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} a_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{p} f_j^{(i)},\ i=1, ..., r. \quad (1.6)$$

इस समग्र प्रपत्र में हम ऊपर परिभाषित H-फलन के लिए लगातार संक्षिप्त संकेतन $H[x_1, ... x_r]$ का व्यवहार करेंगे । यह सरलतापूर्वक स्थापित किया जा सकता है कि

$$H[x_1, ..., x_r] = 0(\mid x_1 \mid^{\alpha_1} ... \mid x_r \mid^{\alpha_r})\ (x_1, ..., x_r)$$

के लिए (0, ..., 0) के प्रतिवेश में

जहाँ

$$\alpha_i = \min Re \left(d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)} \right);\ j=1, ..., M^{(i)},\ i=1, ..., r. \quad (1.7)$$

पुनश्च, $n=0$ के लिए

$$H[x_1, ..., x_r] = 0(\mid x_1 \mid^{\beta_1} ... \mid x_r \mid^{\beta_r})(x_1, ..., x_r)$$

के लिए (∞, ... ∞) के प्रतिवेश में

जहाँ

$$\beta_i = \max Re \left(\left(c_j^{(i)} - 1 \right) / \gamma_j^{(i)} \right);\ j=1, ..., N^{(i)},\ i=1, ..., r.$$

उपर्युक्त संकेतनों में हम सार्वीकृत लाप्लास परिवर्त $f(x)$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं

$$L\text{-}\Omega[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} H[z_1(sx)^{\mu_1}, ..., z_r(sx)^{\mu_r}]\, f(x)dx, \quad (1.9)$$

बशर्ते कि $Re(s)>0$ तथा (1.9) में समाकल का अस्तित्व हो ।

उपर्युक्त संकेतनों के द्वारा हम सर्वीकृत हैंकेल परिवर्त को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित एवं अंकित करते हैं ।

$$\Phi(s) = \mathscr{H} - \Omega[f(x)]$$

$$= \int_0^\infty f(x)(sx)^{1/2} H[z_1(sx)^{\mu_1}, ..., z_r(sx)^{\mu_r}]\, J_v(sx)dx,, \quad (1.10)$$

$)>0$, बशर्ते कि (1.10) के वामपक्ष के समाकल का अस्तित्व हो ।

सुविधा के लिए (1.1) में $\phi(s)$ को आपरेटर रूप में संकेतों द्वारा निम्नवत् प्रदर्शित किया जायेगा

$$\phi^{\rho,k,m}_{z_1,\ldots,z_r;\mu_1,\ldots,\mu_r}(s)$$

2. इस अनुभाग में प्रमेयों के रूप में मुख्य परिणाम वर्गीकृत किये गये हैं जिनका उपयोग H-फलन (1·2) तथा विविध विशिष्ट फलनों के गुणनफल वाले अनेक समाकलों के मूल्यांकन के लिये किया जा सकता है।

प्रमेय 1

यदि

$$\phi(s)=W-\Omega[f(x), \tag{2.1}$$

तथा

$$g(s,y)=L-\Omega[x^{-m-1/2}(x+y)^{k+m-1/2}f(x)], \tag{2.2}$$

तो

$$\phi(s)=\frac{s^{\rho+m-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^\infty e^{-sy}\,y^{m-k-1/2}\,g(s,y)dy, \tag{2.3}$$

बशर्ते कि $Re(s)>0$, $\mu_i>0(i=1,\ldots, r)$, $Re(m+\frac{1}{2}-k)>0$,

$$Re\left(\rho+\sigma_1+\sum_{i=1}^{r}a_i\mu_i\right)>|Re(m)|-\tfrac{1}{2},$$

जहाँ a_i को (1.7),

$$f(x)=\begin{cases}0(x^{\sigma_1}),\ Re(\sigma_1)>0, & \text{लघु } x \text{ के लिये}\\ 0(e^{-\sigma_2 x}),\ Re(\sigma_2)>0, & \text{दीर्घ } x \text{ के लिये}\end{cases} \tag{2.3(b)}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसमें $f(x)$ संतत है क्योंकि $x>0$ तथा (2.3) में समाकल परम अभिसारी है।

उपपत्ति

(1.1) के दक्षिण पक्ष में ह्विटेकर तथा वाटसन[7] के फलस्वरूप $W_{k,m}(sx)$ के लिए अनन्त समाकल निरूपण को व्यवहृत करने पर

$$\phi(s)=\int_0^\infty\frac{(sx)^{k+\rho-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\,e^{-sx}H[z_1(sx)^{\mu_1},\ldots,z_r(sx)^{\mu_r}]f(x)$$

$$\left\{\int_0^\infty t^{-k+m-1/2}\left(1+\frac{t}{sx}\right)^{k+m-1/2}e^{-t}\,dt\right\}dx, \tag{2.4}$$

जहाँ $Re(k-m-\frac{1}{2})\leqslant 0$ तथा यह पूर्णाङ्क नहीं है।

अब आन्तरिक समाकल में $t=sy$ प्रतिस्थापित करने तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर वांछित फल प्राप्त होगा।

उदाहरण

माना $f(x)=x^{\sigma}$, तो

$$\phi(s)=s^{-1}\int_0^{\infty} x^{\sigma-1}(sx)^{\rho}\, e^{-1/2sx}\, W_{k,m}(sx)H[z_1(sx)^{\mu_1}, \ldots, z_r(sx)^{\mu_r}]dx$$

जो परिणाम [4, (1973), p. 57] के पुनरावेदन से (2.6) में समानीत हो जाता है।

$$=s^{-1}\int_0^{\infty} x^{\sigma-1}(sx)^{1/2}\, G_{1,2}^{2,0}\left(sx \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\rho-k \\ \rho+m,\ \rho-m \end{matrix}\right)$$

$$\times H[z_1(sx)^{\mu_1}, \ldots, z_r(sx)^{\mu_r}]dx. \tag{2.6}$$

समाकल (2.6) का मान ज्ञात करने के लिये H-फलन या r चरों को हम कंटूर समाकल रूप (1.2) में व्यक्त करते हैं तथा समाकलन के क्रम को बदल देते हैं और इस प्रकार जो आन्तरिक समाकल प्राप्त होता है उसका मान फलं [3, p. 337 eq. (14)] की सहायता से प्राप्त करते हैं जो इस प्रकार है

$$\phi(s)=s^{-\sigma-1}\, H^{0,2:0:(M',N');\ldots;(M^{(\gamma)},N^{(\gamma)})}_{p+2,q+1:|p:[P',Q'];\ldots;[P^{(\gamma)},Q^{(\gamma)}]}\Bigg[$$

$$(\tfrac{1}{2}\pm m-\rho-\sigma;\mu_1,\ldots,\mu_r),\left\{\left(a_p;\left(\alpha_p^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\}::$$

$$\left\{\left(b_q;\left(\beta_q^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\},(k-\rho-\sigma;\mu_1,\ldots,\mu_r):\left\{\left(l\mathbf{p};\left(U_p^{(i)} f_{|p}^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,r}\right)\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\} \\ \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;\{(d^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\} \end{matrix}\,\right|\, z_1,\ldots,z_r\Bigg], \tag{2.7}$$

बशर्ते कि

$$Re\left(\rho+\sigma+k+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\beta_i\right)<0,\ |\arg z_i\, s^{\mu_i}|<\tfrac{1}{2}\pi V_i,\ V_i>0$$

जहाँ β_i तथा V_i क्रमशः (1.8) तथा (1.6) द्वारा व्यक्त होते हैं। अब $g(s, y)$ का मान निकालने के लिए (2.2) में $f(x)=x^{\sigma}$ रखते हैं, इसे (1.9) के रूप में लिखते हैं, और उसमें आगत H-फलन को कंटूर समाकल रूप (1.2) में व्यक्त करते हैं, समाकल के क्रम को बदलते हैं (जो वैध है) तथा

इस प्रकार से जो आन्तरिक समाकल प्राप्त होता है उसका मान परिणाम [3, p. 139, eq. (22)] की सहायता से निकालते हैं तो निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$g(s,y)=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s)\ldots\phi_r(s_r)\psi(s_1,\ldots,s_r)$$

$$(z_1 s^{\mu_1})^{s_1}\ldots(z_r s^{\mu_r})^{s_r}\Gamma(2\nu)y^{\lambda+\nu-1}s^{-\lambda-\nu}$$

$$e^{1/2sy}W_{\lambda-\nu,\lambda+\nu-1/2}(sy)ds_1\ldots ds_r. \tag{2.8}$$

जहाँ

$$\lambda=\tfrac{1}{2}(k+m+\tfrac{1}{2}),\ \nu=\tfrac{1}{2}\left(\rho+\sigma+\sum_{i=1}^{r}\mu_i s_i-m+\tfrac{1}{2}\right),\ Re(s)>0,$$

$Re(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m)>0$ तथा $|\arg y|<\pi$, फिर (2.8) से $g(s, y)$ के मान को (2.3) में रखने पर तथा समाकल के क्रम को परिवर्तित करने पर हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$\phi(s)=\frac{s^{\rho+m-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)(z_1 s^{\mu_1})^{s_1}\ldots(z_r s^{\mu_r})^{s_r}\Gamma(2\nu)s^{+\lambda-\nu}$$

$$\left\{e^{-1/2sy}\,y^{m+\frac{1}{2}\left(\rho+\sigma-k+\sum_{i=1}^{r}\mu_i s_i\right)}-W_{\lambda-\nu,\lambda+\nu-1/2}(sy)dy\right\}ds_1\ldots ds_r. \tag{2.9}$$

(2.9) में आन्तरिक समाकल का मान परिणाम [3, p. 216, eq. (16)] से निकालने पर (2.9) का दक्षिण पक्ष (2.7) के दक्षिण पक्ष में समानीत हो जायेगा। इस प्रकार प्रमेय की पुष्टि होती है।

प्रमेय 2

यदि

$$\phi(s)=W-\Omega[f(x)], \tag{2.10}$$

तो

$$\phi(s)=\frac{2\Gamma(1-k)\Gamma(2\lambda-k)}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^\infty P_{m-1/2}^{1-2\lambda}(\cosh 2y)\tanh^{2\lambda}y$$

$$\cosh^{2-2\rho}y\,g(s,y)dy. \tag{2.11}$$

जहाँ

$$g(s,y)=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tanh^{2t}y}{t!}\phi^{\lambda+\rho+t,k-\lambda,1/2-\lambda}_{z_1\operatorname{sech}^{2\mu_1}y,\ldots,z_r\operatorname{sech}^{2\mu_r}y;\mu_1;\ldots;\mu_r}(s\cosh^2 y) \tag{2.12}$$

बशर्ते कि

$$\mu_i>0(i=1,\ldots,r),\ Re(s)>0,\ |\arg s|<3/2\pi,$$

$$|\arg Z_i s^{\mu_i}|<\tfrac{1}{2}\pi V_i,\ V_i>0,\ Re(\tfrac{1}{2}-k\pm m)>0,\ Re(\lambda)>0,$$

$$Re\left(\rho+\lambda\pm(\tfrac{1}{2}-\lambda)+\tfrac{1}{2}+\sigma_1+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mu_i\right)>0,$$

जहाँ α_i, V_i पूर्ववत हैं, $f(x)$ से प्रतिबन्धों (2.3)(b) की पुष्टि होती है और (2.11) का समाकल पूर्ण अभिसारी है।

उपपत्ति

इसकी विधि प्रमेय 1 की तरह है, अन्तर यह है कि यहाँ पर हम माइजर[5] के समाकल निरूपण $W_{k,m}(sx)$ का उपयोग करते हैं अर्थात्

$$W_{k,m}(sx)=\frac{2\Gamma(1-k)\Gamma(2\lambda-k)}{\Gamma_*(\frac{1}{2}-k\pm m)}(sx)^{\lambda}\int_0^{\infty}e^{1/2sx}\sinh^2 y$$

$$W_{k-\lambda,1/2-\lambda}(sx\cosh^2 y)\,P_{m-1/2}^{1-2\lambda}(\cosh 2y)\sin^{2\lambda}y\,dy, \tag{2.13}$$

जहाँ $s\neq 0$, तथा श्रेणी प्रसार

$$e^{sx\sinh^2 y}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tanh^{2t}y}{t!}(sx\sinh^2 y)^t. \tag{2.14}$$

प्रमेय 3

यदि

$$\Phi(s)=\mathscr{H}-\Omega[f(x)], \tag{2.15}$$

जैसा कि (1.10) में दिया है तथा

$$g(s,y)=\int_0^{\infty}x^{\nu+1/2}\cos(sxy)\,H[z_1(sx)^{\mu_1},\ldots,z_r(sx)^{\mu_r}]\,f(x)dx, \tag{2.16}$$

तो

$$\phi(s)=\frac{s^{\nu+1/2}}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1(1-y^2)^{\nu-1/2}g(s,y)dy. \tag{2.17}$$

बशर्ते कि फलन $f(x)$ से (2.3(b)),

$$Re\left(\nu+\sigma_1+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\alpha_i\right)>-\tfrac{1}{2}\;|\arg Z_i s^{\mu_i}|<\tfrac{1}{2}\pi V_i$$

की तुष्टि होती है और $f(x)$ ऐसा कि $g(s,y)$ का अस्तित्व रहता है।

उपपत्ति

(2.15) में $J_\nu(x)$[1, p. 98, eq. (6.45)] के लिए सान्त निरूपण का पुनरावेदन करने पर तुरन्त ही परिणाम (2.17) प्राप्त होता है।

प्रमेय 4

यदि

$$\phi(s)=W-\Omega[f(x)], \tag{2.18}$$

तो

$$\phi(s)=2^{2\lambda}\int_0^\infty P_{2m-1/2}^{1-2\lambda}(\cosh y)\tanh^{2\lambda}y(\cosh y)^{-2+3/2}$$

$$\phi^{\rho+\lambda,k+\lambda,-1/4}_{Z_1\cosh^{-2\mu_1}y,\ldots,Z_r\cosh^{-2\mu_r}y;\mu_1,\ldots,\mu_r}(s\cosh^2 y)dy, \tag{2.19}$$

बशर्ते कि

$$\mu_i>0,\ Re(s)>0,\ Re\left(\rho+\lambda+\sigma_1+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{4}+\sum_{i=1}^{r}\mu_i a_i\right)>0,\ |\arg Z_i s^{\mu_i}|$$

पूर्ववत दिया जाता है तथा $f(x)$ से (2.3b) की तुष्ट होती है और समाकल (2.19) का अस्तित्व होता है।

उपपत्ति

यहाँ हम माइजर[5] के समाकल निरूपण $W_{k,m}(sx)$ का उपयोग करेंगे जो निम्न प्रकार है।

$$W_{k,m}(sx)=2^{\lambda-k+1/4}(sx)^{\lambda+1/4}\int_0^\infty e^{-1/2sx\sinh^2 y}D_{2k+2-1/2}(\sqrt{(2sx\cosh^2 y)})$$

$$\sinh^2 y\, P_{2m-1/2}^{1-2\lambda}(\cosh y)dy. \tag{2.20}$$

जहाँ (2.18) में $s\neq 0$, $|\arg s|>\frac{1}{2}\pi$ तथा $R(\lambda)>0$, तथा फलस्वरूप परिणाम [7, p. 347] अर्थात्

$$D_h(z)=2^{1/2h+1/4}z^{-1/2}W_{1/2h+1/4-1/4}(\tfrac{1}{2}z^2). \tag{2.21}$$

शेष विधि पिछली प्रमेयों की भाँति है बशर्ते कि समाकल के क्रम में परिवर्तन वैध हो।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० आर०जी० बुशमान[2] के कार्य से उत्साहित हुए तथा प्रो० एच०एम० श्रीवास्तव से विचार विनिमय द्वारा लाभान्वित हुए इसके लिए वे उनके आभारी हैं।

निर्देश

1. बोमैन, फ्रैंक, Introduction to Bessel Functions, डोवर पब्लिकेशन्स, न्यूयार्क, 1958
2. बुशमान, आर०जी०, (प्रेषित), 1978
3. एर्डेल्यी, ए० , Table of Integral Transforms, भाग 1, मैकग्राहिल 1954

4. मथाइ, ए०एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Maths (348), **मकगिल यूनिवर्सिटी मॉंट्रियल, कनाडा**

5. माइजर, सी०एस०, Proc. Nederl. Acad. Wetensch Amsterdam, 1941, **44**, 599-605

6. श्रीवास्तव, एच०एम० तथा पण्डा, आर०, Jour. reine. angew. Math. 1976, **288**, 129-145

7. ह्विटेकर, ई०टी० तथा वाटसन, जी०एम० , A Course of Modern Analysis. **कैम्ब्रिज** यूनिवर्सिटी प्रेस

8. सिंह, ए०के० तथा प्रसाद, वाई०एन०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1980, **23**, 69-75

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ । प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए ।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए ।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है । इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा ।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि । रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है ।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा ।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे ।

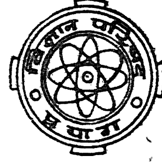
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये । इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये । जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये । चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा । चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें ।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे ।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या । निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80 ।

9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे । इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी ।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये । आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे ।

प्रबंध सम्पादक



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates

Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 £ *or* $ 4

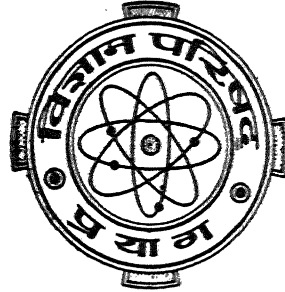
मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
811229

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 24 October 1981 No. 4



The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981 Pages, 301-305

फलनों की सन्निकटन कोटि

आर० बी० सक्सेना
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मई 2, 1981]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य निम्नलिखित श्रेणी के लिए प्रमेय सिद्ध करना है :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (bn \cos nx - an \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$$

Abstract

Degree of approximation of functions by the conjugate series of a Fourier series. *By* R. B. Saxena, Department of Mathematics, University of Saugar, Sagar.

The object of this note is to prove a theorem for the series $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$.

1. माना कि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और लेबेस्क समाकलनीय है। बिन्दु x पर f के साथ सम्बद्ध फूरियर श्रेणी है :

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.1}$$

$f(x)$ की फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी निम्न प्रकार लिखी जाती है

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x). \tag{1·2}$$

फलन $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $(0<\alpha<1)$ यदि (ज़िगमुंड[5])

$$f(x+h)-f(x)=0(|h|^{\alpha}). \tag{1·3}$$

माना $\{p_n\}$ अनृण अचरों का ऐसा अनुक्रम है कि $p_0>0$ तथा $P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n$. तो अनुक्रम-से-अनुक्रम रूपान्तर

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m\, s_m \tag{1·4}$$

जहाँ अनुक्रम $\{s_n\}$ अनुक्रम है श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$, के आंशिक योगों का और अनुक्रम $\{S_n\}$ का रीज़ माध्य (R, p_m) कहलाता है।

(R, p_n) माध्य नियमित हैं यदि तथा केवल यदि $P_n\to\infty$ n सहित (पेटर्सन[4]) ।

2. एलेक्ज़िट्ज[1] ने निम्नलिखित प्रमेय फलन $f\in \text{Lip } \alpha$ के सन्निकटन की कोटि के सम्बन्ध में इसकी फूरियर श्रेणी के (C, δ) माध्यों के द्वारा सिद्ध की है।

प्रमेय A :

यदि $0<a<1$ के लिए आवर्ती फलन $\in \text{Lip } \alpha$ हो तो $0<\alpha<\delta\leqslant 1$ के लिए इसकी फूरियर श्रेणी (C, δ) माध्यों की सन्निकटन कोटि

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)-\sigma_n^{\delta}(x)|=0(n^{-\alpha})$$

है तथा $0<\alpha\leqslant\delta\leqslant 1$ के लिए

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)-\sigma_n^{\delta}(x)|=0(n^{-\alpha}\log n)$$

जहाँ $\sigma_n^{\delta}(x)$ (1·1) के आंशिक योगों के (C, δ)-माध्य हैं।

हाल ही में चन्द्रा[3] ने निम्नलिखित प्रमेय रीज़माध्यों (R, p_n) का उपयोग करते हुए एक आवर्ती फलन की सन्निकटन कोटि के लिए सिद्ध किया है।

प्रमेय B: एक आवर्ती फलन जिसका आवर्त 2π है और अपनी फूरियर श्रेणी के (R, pn) माध्यों के द्वारा Lip α वर्ग से सम्बद्ध हो तो उसे

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)-T_n(x)|=\begin{cases}0\{(p_n/P_n)^{\alpha}\};\ 0<\alpha<1\\ 0\{(p_n/P_n)\log(P_n/p_n)\};\ \alpha=1\end{cases}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जहाँ (R, p_n) माध्य नियमित हैं तथा $n \geqslant n_0$ सहित $0 < pn \uparrow$

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य श्रेणी (1·2) के लिए प्रमेय B से समरूप परिणाम सिद्ध करना है। ठीक ठीक कहें तो यह कि हमें निम्नांकित सिद्ध करना है :

प्रमेय

यदि कोई फलन $f(x)$ जिसका आवर्त 2π है Lip α वर्ग से सम्बद्ध हो तो इसका संयुग्मी फलन

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t) \cot \tfrac{1}{2}t \, dt \tag{2·1}$$

विद्यमान होता है और तब $f(x)$ की संन्निकटन कोटि को संयुग्मी श्रेणी (1·2) के (R, pn) माध्यों द्वारा

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)| = \begin{cases} 0\{(p_n/P_n)^\alpha\}, \; 0 < \alpha < 1 \\ 0\{(p_n/P_n) \log (P_n/p_n)\}, \; \alpha = 1. \end{cases}$$

के रूप में व्यक्त किया जाता है जहाँ (R, pn) माध्य नियमित हैं तथा $n \geqslant n_0$ महित $0 < pn \uparrow$ तथा

$$\psi(t) = \{f(x+t) - f(x-t)\}.$$

3. प्रमेय की उपपत्ति

हम लिखेंगे

$$\bar{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

तो जिगमंड[5] से हमें

$$\bar{s}_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos (n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \tag{3·1}$$

प्राप्त होगा। सब (1·3) से तथा (3·1) के (R, pn) माध्यों को $\bar{t}_n(x)$ द्वारा लिखने मे

$$\bar{t}_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \bar{s}_k$$

$$= -\frac{1}{2\pi P_n}\int_0^\pi \psi(t) \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos (k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt$$

$$\bar{t}_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi P_n}\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{\sin \frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^{n} P_k \cos (k+\tfrac{1}{2})t \, dt$$

अतः
$$|\bar{t}_n(x)-\bar{f}(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi}\left|\frac{\psi(t)}{\sin \frac{1}{2}t}\right|\sum_{k=0}^{n} p_k \cos (k+\tfrac{1}{2})t$$

$$=\frac{1}{2\pi P_n}\left\{\int_0^{p_n/P_n}+\int_{p_n/P_n}^{\pi}\right\}\left|\frac{\psi(t)}{\sin \frac{1}{2}t}\right|\sum_{k=0}^{n} p_k \cos (k+\tfrac{1}{2})t\ dt$$

$$=I_1+I_2, \text{ माना} \tag{3·2}$$

अब

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_1=0\left\{\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\pi(t)|}{\sin \frac{1}{2}t}\,dt\right\}$$

$$=0\left\{\int_0^{p_n/P_n} t^{\alpha-1}\,dt\right\}$$

$$=0\,\{(p_n/P_n)^{\alpha}\} \tag{3·3}$$

तथा

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_2=0\left\{\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi} t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n} p_k \cos (k+\tfrac{1}{2})t\,dt\right\}$$

$$=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi} t^{\alpha-2}\,dt\right\},$$

अब चूंकि $0<pk\uparrow$ के साथ ही $k\geqslant k_0$ अतः ऐबेल की प्रमेयिका का उपयोग करने पर (देखें चन्द्रा[2])

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \cos (k+\tfrac{1}{2})t=0(t^{-1}\,p_n)$$

अब $0<\alpha<1$ के लिए

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_2=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha-1}\right\}=0\{(p_n/P_n)^{\alpha}\} \tag{3·4}$$

तथा $\alpha=1$, के लिए

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_2=0\{(p_n/P_n)\log (p_n/P_n)\}. \tag{3·5}$$

अतः $0<\alpha<1$ के लिए (3·3) तथा (3·4) को एवं $\alpha=1$ के लिए (3·3) तथा (3·5) को संयुक्त करने से प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० मी० श्रीवास्तव का उदार सहायता तथा सुझावों के लिए एवं डा० पी० एल० शर्मा का शोध प्रपत्र की तैयारी में प्रोत्साहन के लिए अत्यन्त कृतज्ञ है।

निर्देश

1. एलेक्जिट्स, जी०, *Convergence problems of orthogonal series*, पर्गमान प्रेस, 1961.
2. चन्द्रा, पी०, *Proc. Edin. Math. Soc.*, 1970, 17, 65-70.
3. वही, *Nanta Mathematica*, 1975, **8**, 88-91.
4. पेटरसन, जी० एम०, *Regular matrix transformations*, मकग्राहिल पब्लिशिंग कम्पनी लिमिटेड, लंदन 1966
5. जिगमंड ए०, *Trigonometrical series*, वार्सा 1935.

Vijnana Parishda Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981 Pages, 307-315

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन H(x, y) के लिए आवर्ती सूत्र

वेद प्रकाश अग्रवाल तथा एस० के० वर्मा
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मई 20, 1980]

सारांश

कतिपय व्युत्पन्नों की स्थापना के पश्चात् दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिए कुछ आवर्ती सूत्र प्राप्त किये गये हैं। इन परिणामों की विशिष्ट दशाएँ हाल ही में गुलाटी द्वारा प्राप्त ज्ञात फलों के रूप में हैं।

Abstract

Ou some recurrence formulae for generalised function $H(x, y)$ **of two variables.** *By* Ved Prakash Agrawal and S. K. Verma, Department of Mathematics and Statistics, University of Saugar, Sagar.

In this paper we have obtained some recurrence formulae for the generalized function $H(x, y)$ of two variables after establishing some derivatives. Certain known results recently obtained by Gulati are particular cases of our results.

1. भूमिका

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्नलिखित मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकलों द्वारा प्रादर्शित किया जा सकता है

$$H(x, y)=H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1}{p_1,\ q_1}\\[2ex] \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\[2ex] \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_1;\alpha_1, A_1), \ldots, (a_{p1};\alpha_{p1}, A_{p1})\\ (b_1;\beta_1, B_1), \ldots, (b_{q1};\beta_{q1}, B_{q1})\\ (c_1, \gamma_1), \ldots, (c_{p2}, \gamma_{p2})\\ (d_1, \delta_1), \ldots, (d_{q2}, \delta_{q2})\\ (e_1, E_1), \ldots, (e_{p3}, E_{p3})\\ (f_1, F_1), \ldots, (f_{q3}, F_{q3})\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t)\, \theta_1(S)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t\, ds\, dt. \qquad (1\cdot1$$

जहाँ

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-aj+\alpha_{js}+Ajt)}{\prod_{j=1+n_1}^{p_1} \Gamma(aj-\alpha_{js}-Aj^t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-bj+\beta_j s+B_j t)}$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(dj-\delta js) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-cj+\gamma js)}{\prod_{j=1+n_2}^{p_2} \Gamma(cj-\gamma js) \prod_{j=1+m_2}^{q_2} \Gamma(1-dj+\delta js)}$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=1+n_3}^{p_3} \Gamma(e_j-E_j t) \prod_{j=1+m_3}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_j t)}$$

जहाँ x तथा y शून्य के तुल्य नहीं है एवं रिक्त गुणन फल को इकाई माना जाता है। और भी, अ-नृण पूर्णांक n_i, p_i, q_i $(i=1, 2, 3)$ तथा m_2, m_3 ऐसे हैं कि $0 \leqslant n_i \leqslant p_i$, $q_i \geqslant 0$, $0 \leqslant m_j \leqslant q_j$ $(i=1, 2, 3;$ $j=2, 3)$; जिसमें ग्रीक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ तथा बड़े अक्षर A, B, E, F सभी घन हैं।

कंटूर L_1 s-तल में हैं और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त रहा जा सके कि $\Gamma(d_j-\delta_j s)$; $(j=1, 2, ..., m_2)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)$; $j=1, ..., n_1)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma js)$: $(j=1, ..., n_2)$ के कंटूर बाईं ओर पड़ें।

कंटूर L_2 t-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़े तो आश्वस्त रहा जा सके कि $\Gamma(f_j-F_j t)$; $(j=1, .., m_3)$, के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)$; $(j=1, ..., n_1)$, $\Gamma(1-e_j+E_j t)$; $(j=1, ..., n_3)$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

(1·1) में परिभाषित फलन x तथा y का विश्लेषिक फलन है यदि

(i) $\sum_{j=1}^{p_1} (\alpha_j) + \sum_{j=1}^{p_2} (\gamma_j) < \sum_{j=1}^{q_1} (\beta_j) + \sum_{j=1}^{q_2} (\delta_j)$,

(ii) $\sum_{j=1}^{p_1} (A_j) + \sum_{j=1}^{p_3} (E_j) < \sum_{j=1}^{q_1} (B_j) + \sum_{j=1}^{q_3} (F_j)$.

(1·1) में समाकल निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी होता है :

$$\text{(iii)} \quad \lambda = \sum_{j=1}^{n_1}(a_j) - \sum_{j=1+n_1}^{p_1}(a_j) + \sum_{j=1}^{m_2}(\delta_j) - \sum_{j=1+m_2}^{q_2}(\delta_j) + \sum_{j=1}^{n_2}(\gamma_j)$$

$$-\sum_{j=1+n_2}^{p_2}(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q_1}(\beta_j) > 0$$

$$\text{(iv)} \quad \mu = \sum_{j=1}^{n_1}(A_j) - \sum_{j=1+n_1}^{p_1}(A_j) + \sum_{j=1}^{m_3}(E_j) - \sum_{j=1+m_3}^{q_3}(F_j) + \sum_{j=1}^{n_3}(E_j)$$

$$-\sum_{j=1+n_3}^{p_3}(E_j) - \sum_{j=1}^{q_1}(B_j) > 0$$

$$\text{(v)} \quad |\arg . x| < \tfrac{1}{2}\lambda\pi, \; |\arg . y| < \tfrac{1}{2}\mu\pi$$

पुनश्च, x तथा y के लघु मानों के लिए

$$H(x, y) = 0(|x|^\alpha . |y|^\beta).$$

जहाँ

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \min . Re(d_j/\delta_j) \;\; j=1, \ldots, m_2 \\ \beta &= \min . Re(f_i/F_i) \;\; i=1, \ldots, m_3 \end{aligned}\right\} \quad (1\cdot2)$$

1(a). (1·1) की विशिष्ट दशाएँ

यदि हम (1·1) में आगत समस्त α, β, γ, δ, A, B, E तथा F को इकाई मान लें तो $H(x, y)$ अग्रवाल[1] द्वारा प्रचारित दो चरों वाले G-फलन में समानीत हो जाता है। (1·1) में प्राचलों को और आगे विशिष्टीकृत करने पर ऐपेल के फलन F_1, F_2, F_3, F_4 तथ कैम्पे-द-फेरी फलन $F(x, y)$ को इसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

पुन: यदि हम (1·1) में $p_1 = q_1 = 0$ लें तो $H(x, y)$ फाक्स के दो H-फलनों के गुणनफल में टूट जाता है। इस प्रकार

$$H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{0,\,0}{0,\,0} & \ldots & \\ & \ldots & \\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, q_2} & (c_1, \gamma_1), \ldots, (c_{p_2}, \gamma_{p_2}) & x \\ & (d_1, \delta_1), \ldots, (d_{q_2}, \delta_{q_2}) & \\ \binom{m_3,\, n_3}{p_3,\, q_3} & (e_1, E_1), \ldots, (e_{p_3}, E_{p_3}) & y \\ & (f_1, F_1), \ldots, (f_{q_3}, F_{q_3}) & \end{array}\right]$$

$$=H^{m_2,n_2}_{p_2,q_2}\left[x\left|\begin{matrix}(c_1,\gamma_1),\ldots,(c_{p_2},\gamma_{p_2})\\(d_1,\delta_1),\ldots,(d_{q_2},\delta_{q_2})\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H^{m_3,n_3}_{p_3,q_3}\left[y\left|\begin{matrix}(e_1,E_1),\ldots,(e_{p_3},E_{p_3})\\(f_1,F_1),\ldots,(f_{q_3},F_{q_3})\end{matrix}\right.\right] \tag{1·3}$$

यही नहीं, यदि हम (1·1) में $y\to 0$ होने दें और उसमें निम्नलिखित प्रकार से प्राचलों को चुनें तो $H(x, y)$ फाक्स के H-फलन में समानीत हो जाता है। इस प्रकार हमें गुप्ता[3] का निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है :

$$\underset{y\to 0}{Lt}\ H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1}{p_1,\ q_1}\\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\ \binom{1,\ p_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_1;\alpha_1,1),\ldots,(a_{p_1};\alpha_{p_1},1)\\(b_1;\beta_1,1),\ldots,(b_{q_1};\beta_{q_1},1)\\(c_1;\gamma_1),\ldots,(c_{p_2},\gamma_{p_2})\\(d_1,\delta_1),\ldots,(d_{q_2},\delta_{q_2})\\(e_1,1),\ldots,(e_{p_3},1)\\(0,1),(f_2,1),\ldots,(f_{q_3},1)\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ \\ \\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{p_3}\Gamma(1-e_j)}{\prod\limits_{j=2}^{q_3}\Gamma(1-f_j)}\,H^{m_2,n_1+n_2}_{p_1+p_2,q_1+q_2}\times$$

$$\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_{n_1},\alpha_{n_1})\},\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\},\\(a_{n_1}+1,\alpha_{n_1}+1).\ldots,(a_{p_1},\alpha_{p_1})\\\{(d_{q_2},\delta_{q_2})\},\{(b_{q_1},\beta_{q_1})\}\end{matrix}\right.\right] \tag{1·4}$$

इसी प्रकार $n_1=0$ हो तो संकेत $H_1(x, y)$ से दो चरों वाला H-फलन सूचित होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित संकेतन का प्रयोग करेंगे

$$H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1}{p_1,\ q_1}\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1})\}\\\{(b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})\}\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

जिससे यह सूचित होगा कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल वे ही हैं जो (1·1) में $H(x, y)$ के हैं। इसी प्रकार निम्नलिखित संकेतनों से भी समझना चाहिए

$$H\left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \cdots \\ \{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\} \\ (d_{p_2},\ \delta_{p_2}) \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\right] \text{इत्यादि}$$

पुनः $\{(a_p, \alpha_p)\}$ से प्राचलों के अनुक्रम $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ का बोध होता है ; $\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}$ से $(a_1; \alpha_1, A_1), \ldots, (a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})$; $\Gamma(\alpha\pm\beta)$ से $\Gamma(\alpha+\beta)$, $\Gamma(\alpha-\beta)$ तथा $(a\pm b, h)$ से युग्म $(a+b, h)$, $(a-b, h)$ का बोध होता है।

2. इस अनुभाग में निम्नलिखित सूत्र निकाले जावेंगे

$$x\frac{\partial}{\partial x}H[x^h, y^k]=\frac{h}{\gamma_1}[C_1-1]\ H[x^h,\ y^k]+$$

$$\frac{h}{\gamma_1}H\left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \\ \cdots \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \cdots \qquad \cdots \\ (c_1-1,\ \gamma_1), (c_2,\ \gamma_2), \ldots (c_{p_2},\ \gamma_{p_2}) \\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix}\right] \tag{2·1}$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}H[x^h, y^k]=\frac{h}{\gamma_{p_2}}(cp_2-1)\ H[x^h, y^k]$$

$$-\frac{h}{\gamma p_2}H\left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \\ \cdots \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ (C_1,\ \gamma_1)\ (C_2,\ \gamma_2) \ldots (C_{p_2-1},\ \gamma_{p_2-1})\ (C_{p_2-1},\ \gamma_{p_2}) \\ \{(dq_2,\ \delta q_2)\} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x^h \\ \\ y^k \end{matrix}\right]$$

(2·2)

$$x\frac{\partial}{\partial x}H[x^h, y^k]=\frac{hd_1}{\delta_1}\ H[x^h, y^k]$$

$$-\frac{h}{\delta_1}H\left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \cdots \qquad \cdots \\ (C_{p_2},\ \gamma_{p_2}) \qquad ; \\ (d_1+1,\ \delta_1), (d_2,\ \delta_2), \ldots, (d_{p_2},\ \delta_{p_2}) \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} H[x^h, y^k] = \frac{hdq_2}{\delta q_2} H[x^h, y^k]$$

$$+ \frac{h}{\delta q_2} H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & x^h \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} & \begin{array}{c} C_{p_2}, \gamma_{p_2}) \\ (d_1, \delta_1), \ldots, (dq_{2-1}, \delta_{q_2-1})\,(dq_{2\cdot 1};\, \delta_{q_2}) \end{array} & \\ \cdots & \cdots & y^k \end{array} \right] \quad (2\cdot4)$$

ऐसे ही परिणाम $y \frac{\partial}{\partial x} H[x^h, y^k]$ के लिए भी लागू होते हैं।

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिए हम वाम पक्ष में (1·1) में से दो चरों के H-फलन के लिए द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकलन का मान रखकर समाकलन तथा अवकलन के क्रम को कथित प्रतिबन्धों को ध्यान में रखते हुए परिवर्तित करते हैं जो वैध है। इस प्रकार (2·1) का वामपक्ष निम्नलिखित के तुल्य हो जाता है

$$\frac{h}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(S, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, s x^{hs}\, y^{kt}\, dS\, dt. \quad (3\cdot1)$$

किन्तु $$S\gamma(1-C_1+\gamma_1 s) = \frac{1}{\gamma_1}(C_1-1+1-C_1+\gamma_1 s)\,\Gamma(1-C_1+\gamma_1 s)$$

$$= \frac{C_1-1}{\gamma_1}\,\Gamma(1-C_1+\gamma_1 s) + \frac{\Gamma(2-C_1+\gamma_1 s)}{\gamma_1} \quad (3\cdot2)$$

अब (3·2) के सम्प्रयोग से (3·1)(2·1) में दर्शित परिणाम बन जाता है।

इसी प्रकार से अग्रसर होकर हम (2·2), (2·3) तथा (2·4) को सिद्ध कर सकते हैं।

4. (2·2), (2·3) तथा (2·4) में से (2·1) घटाने पर क्रमश:

$$\left(\frac{C_{p_2-1}}{\gamma p_2} - \frac{C_1-1}{\gamma_1}\right) H[x^h, y^k] = \frac{1}{\gamma_{p_2}}$$

$$H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & x^h \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} & \begin{array}{c} (C_1, \gamma_1), \ldots, (C_{p_2-1}, \gamma_{p_2-1}), (C_{p_2-1}, \gamma p_2) \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \end{array} & \\ \cdots & \cdots & y^k \end{array} \right]$$

$$+\frac{1}{\gamma_1} H \left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ (C_1-1, \gamma_1), (c_2, \gamma_2), \ldots, (C_{p_2}, \gamma_{p_2}) \\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix} \right] \tag{4·1}$$

ऐसा ही परिणाम $\left(\frac{e_{p_3}-1}{E_{p_3}} - \frac{e_1-1}{E_1}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए भी लागू होता है।

$$\left(\frac{d_1}{\delta_1} - \frac{C_1-1}{\gamma_2}\right) H[x^h, y^k] = \frac{1}{\delta_1} H \left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ (C_{p_2}, \delta_{q_2}) \\ (d_1+1, \delta_1), (d_2, \delta_2) \ldots \\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix} \right]$$

$$+\frac{1}{\gamma_1} H \left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ (C_1-1, \gamma_1), (C_2, \gamma_2), \ldots, (C_{p_2}, \gamma_{p_2}) \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix} \right] \tag{4·2}$$

ऐसा ही परिणाम $\left(\frac{f_1}{F_1} - \frac{e_1-1}{E_1}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए भी लागू है।

$$\left(\frac{d_{q_2}}{\delta_{q_2}} - \frac{e_1-1}{\gamma_1}\right) H[x^h, y^k] = \frac{1}{\gamma_1} H \left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ (C_1-1, \gamma_1), (C_2, \gamma_2), \ldots, \\ (d_{qi}, \delta_{qi}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix} \right]$$

$$-\frac{1}{\delta_{q_2}} H \left[\begin{matrix} \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cdots \\ \{(C_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (d_1, \delta_1), \ldots, (d_{q_2}-1, \delta_{q_2-1}), (d_{q_2+1}, \delta_{q_2}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix} \right] \tag{4·3}$$

ऐसी ही परिणाम $\left(\frac{f_{q_3}}{F_{q_3}} - \frac{e_1-1}{E_1}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए भी लागू होता है।

(2·3) तथा (2·4) में से (2·2) को घटाने पर क्रमशः

$$\left(\frac{d_1}{\delta_1}-\frac{e_{p_2-1}}{\gamma_{p_2}}\right) H[x^h, y^k] = \frac{1}{\delta_1} H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l}(e_{p_2}, \gamma_{p_2}) \\ (d_1+1, \delta_1), (d_2, \delta_2) \ldots (d_{q_2}, \delta_{q_2})\end{array} & \begin{array}{c} x^h \\ y^k \end{array} \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{\gamma_{p_2}} H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{c}(C_1, \gamma_1), \ldots, (C_{p_2-1}, \gamma_{p_2-1})\ (C_{p_2-1}, \gamma_{p_2}) \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & \begin{array}{c} x^h \\ y^k \end{array} \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right] \qquad (4{\cdot}4)$$

ऐसा ही परिणाम $\left(\frac{f_1}{F_1}-\frac{e_{p_3-1}}{E_{p_3}}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए भी लागू है।

$$\left(\frac{C_{p_2-1}}{\gamma_{p_2}}-\frac{d_{q_2}}{\delta_{q_2}}\right) H[x^h, y^k]=$$

$$\frac{1}{\gamma_{p_2}} H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l}(C_1, \gamma_1), (C_2, \gamma_2), \ldots, (C_{p_2-1}, \gamma_{p_2-1})\ (C_{p_2-1}, \gamma_{p_2}) \\ \{(d_{p_2}, \delta_{p_2})\}\end{array} & \begin{array}{c} x^h \\ y^k \end{array} \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

$$+\frac{1}{\delta_{q_2}} H \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l}\{(C_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (d_1, \delta_1), \ldots, (d_{q_2-1}, \delta_{q_2-1}), (d_{q_2+1}, \delta_{q_2})\end{array} & \begin{array}{c} x^h \\ y^k \end{array} \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right] \qquad (4{\cdot}5)$$

ऐसा ही परिणाम $\left(\frac{e_{p_3-1}}{E_{p_3}}-\frac{f_{q_3}}{F_{q_3}}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए लागू है।

(2·3) से (2·4) घटाने पर

$$\left(\frac{d_1}{\delta_1}-\frac{d_{q_2}}{\delta_{q_2}}\right) H[x^h, y^k]=$$

$$\frac{1}{\delta_1} H\left[\begin{pmatrix} \cdots \\ m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \\ \cdots \end{pmatrix}\middle| \begin{matrix} \cdots \\ \{(C_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (d_1+1, \delta_1)\, (d_2, \delta_2), \ldots, (d_{q_2}, \delta_{q_2}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix}\right]$$

$$+\frac{1}{\delta_{q_2}} H\left[\begin{pmatrix} \cdots \\ m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \\ \cdots \end{pmatrix}\middle| \begin{matrix} \cdots \\ \{(C_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (d_1+1, \delta_1), (d_2, \delta_2), \ldots, (d_{q_2}, \delta_{q_2}) \\ \cdots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^h \\ y^k \end{matrix}\right] \qquad (4{\cdot}6)$$

ऐसा ही परिणाम $\left(\frac{f_1}{F_1}-\frac{f_{q_3}}{F_{q_3}}\right) H[x^h, y^k]$ के लिए लागू होता है।

दो चरों वाले $H(x^h, y^k)$ सार्वीकृत फलन के प्राचलों में संमिति के कारण ऊपर प्राप्त परिणामों को अन्य अनेक रूपों में लिखा जा सकता है।

5. विशिष्ट दशाएँ

(1) यदि हम (2·1),(2·2),(2·3) तथा (2·4) में समस्त $\alpha, \beta, \delta, A, B, E$ तथा F को इकाई के तुल्य रखें तो गुलाटी के कुछ फल[2] प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार (4·1), (4·2), (4·3), (4·4), (4·5) तथा (4·6) से भी। (2) पुनः यदि $h=1$ रखें तो अग्रवाल[1] द्वारा दिया गया ज्ञात फल प्राप्त होता है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया,** 1965, 536-546.
2. गुलाटी, एच० सी०, **डिफेन्स साइंस जर्न०,** 1971, **21,** (2)
3. गुप्ता, पी० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस,** 1972, **65,** 117-123.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 317-320

हैंकेल तथा γ-परिवर्तों के मध्य सम्बन्ध

के० एस० सेवारिया
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

[प्राप्त—मार्च 27, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य $f(t)$ के हैंकेल परिवर्त तथा $f(t)\, g(t)$ के γ-परिवर्त के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना है।

Abstract

A relation between Hankel and γ-transforms. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to establish a relation between the Hankel transform of $f(t)$ and the γ-transform of $f(t)\, g(t)$. The result is stated in the form of a theorem and a corollary is also obtained by specializing the function $g(t)$ which is then illustrated by a suitable example in which an infinite integral involving Lauricella's function F_c have been evaluated.

1. किसी फलन $f(t) \in L(0, \infty)$ के हैंकेल परिवर्त को समाकल समीकरण

$$\mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\} = \int_0^\infty (xt)^{1/2} J_\lambda(xt)\, f(t)\, dt \tag{1}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है और इसके γ-परिवर्त को भिन्न समीकरण

$$\mathscr{Y}_\mu\{f(t); p\} = \int_0^\infty (pt)^{1/2}\; Y_\mu(pt)\, (ft)\, dt \text{ द्वारा ।} \tag{2}$$

2. प्रमेय

यदि $f(t) \in L(0, \infty)$, $g(t) \in L(0, \infty)$, $\mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\} \in L(0, \infty)$. $R(\frac{1}{2}+\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2}\pm\mu) > 0$, $p > 0$,

तो $$\mathscr{Y}_\mu\{f(t)\, g(t); p\} = \int_0^\infty \mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\}\, \mathscr{H}_\lambda\{(pt)^{1/2}\, Y_\mu(pt)\, g(t); x\}\, dx; \tag{3}$$

उपपत्ति

हैंकेल के विलोमन प्रमेय [1 p. 5(*I*)] से

$$f(t) = \int_0^\infty (xt)^{1/2} J_\lambda(xt)\, \mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\}\, dx.$$

तो फिर

$$\mathscr{Y}_\mu\{f(t)\, g(t); p\} = \int_0^\infty (pt)^{1/2}\, Y_\mu(pt)\, g(t) \left| \int_0^\infty (xt)^{1/2} J_\lambda(xt)\, \mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\}\, dx, \right.$$

जो समाकलन के क्रम की परिवर्तित करने पर (3) प्रदान करता है।

समाकलन के क्रम का यह परिवर्तन प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। जब हम इस प्रमेय में $g(t) = t^{\sigma-1}$ रखते हैं तो उपप्रमेय प्राप्त होता है। यदि $f(t) \in L(0, \infty)$, $\mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\} \in L(0, \infty)$, $R(\frac{1}{2}+\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2}\pm\mu) > 0$, $R(\sigma+\lambda\pm\mu+1) > 0$, $p > 0$

तो $$\mathscr{Y}_\mu\{t^{\sigma-1} f(t); p\} = \int_0^\infty \mathscr{H}_\lambda\{f(t); x\}\, \theta(p, x),\, dx \tag{4}$$

जहाँ $$\theta(p, x) = 2^\sigma p^{1/2} x^{-\sigma-1/2}\, G_{33}^{21}\left(\frac{p^2}{x^2} \middle| \begin{matrix} (1-\sigma-\lambda)/2,\ -(1+\mu)/2,\ (1-\sigma+\lambda)/2 \\ -\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\mu,\ -(1+\mu)/2 \end{matrix}\right)$$

क्योंकि सम्बन्ध [1, p. 440]

$$Y_\mu(x) = G_{13}^{20}\left(\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} -(1+\mu)/2 \\ -\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\mu,\ -(1+\mu)/2 \end{matrix}\right)$$

को व्यवहृत करने के पश्चात् परिणाम [1, p. 91(20)]

$$\int_0^\infty t^\sigma J_\lambda(xt)\, Y_\mu(pt)\, dt = (px)^{-1/2}\, \theta(p, x)$$

प्राप्त होता है क्योंकि $R(\sigma+\lambda\pm\mu+1) > 0$, $R(\sigma) < 1$.

उदाहरण

माना $$f(t) = t^{\mu+\epsilon-m-\sigma+5/2} K_\epsilon(at) \prod_{i=1}^{r} [J_{\mu_i}(c_i t)]$$

तो फिर [3, p. 162(6)]

$$\mathscr{H}_{\lambda}\{f(t);\, x\} = \frac{2^{\mu+e-m-\sigma+2}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(\mu+2e+\lambda-\sigma+4)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\mu+\lambda-\sigma+4)\} \prod_{i=1}^{r}(c_i^{\mu_i})\, x^{\lambda+1/2}}{\Gamma(1+\lambda) \prod_{i=1}^{r} [\Gamma(1+\mu_i)]\, a^{\lambda+\mu+e-\sigma+4}}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(\mu+2e+\lambda-\sigma+4),\, \tfrac{1}{2}(\mu+\lambda-\sigma+4);\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r,\, 1+\lambda;\; -\frac{c_1^2}{a^2}, \ldots, -\frac{c_r^2}{a^2}, -\frac{x^2}{a^2}\right]$$

क्योंकि $R(\mu+\lambda+2e-\sigma+4)>0,\ R(\mu+\lambda-\sigma+4)>0,\ R(a)>0,\ p>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i),\ c_i>0,$ $(i=1. \ldots, r)$.

तथा [2]

$$\mathscr{Y}_{\mu}\{t^{\sigma-1} f(t);\, p\} = \frac{2^{\mu+e-m+1}\Gamma\{\frac{1}{2}(2e+3)\}\Gamma(\frac{1}{2}(2e+2\mu+3)\} \prod_{i=1}^{r}(c_i^{\mu_i})\, a^{e}}{\Gamma(1+e) \prod_{i-1}^{r} [\Gamma(1+\mu_i)]\, p^{2e+\mu+5/2}}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(2e+3),\, \tfrac{1}{2}(2e+2\mu+3);\, 1+e,\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r;\; -\frac{a^2}{p^2}, \frac{c_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{c_r^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि $R(2e+3)>0,\ R(2e+2\mu+3)>0,\ R(2\mu+3)>0,\ R(a)>0,\ p>\sum_{i=1}^{s}(c_i).\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i),$ $c_i>0.\ (i=1, \ldots, r)$.

उपप्रमेय को व्यवहृत करने पर

$$\int_0^{x} x^{\lambda-\sigma}\, G_{33}^{21}\left[\frac{p^2}{x^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1-\sigma-\lambda}{2}, \frac{-1+\mu}{2}, \frac{1-\sigma+\lambda}{2}\\ -\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\mu, -\frac{1+\mu}{2}\end{matrix}\right]$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(\mu+\lambda+2e-\sigma+4),\, \tfrac{1}{2}(\mu+\lambda-\sigma+4);\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r,\, 1+\lambda;\; -\frac{c_1^2}{a^2}, \ldots, \frac{c_1^2}{a^2}, -\frac{x^2}{a^2}\right] dx$$

$$= \frac{a^{\lambda+\mu+2e-\sigma+4}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(2e+3)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(2e+2\mu+3)\}\Gamma(1+\lambda)}{2p^{2e+\mu+3}\,\Gamma(1+e)\Gamma\{\frac{1}{2}(\mu+2e+\lambda-\sigma+4)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\mu+\lambda-\sigma+4)\}}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(2e+3), \tfrac{1}{2}2e+2\mu+3); 1+\mu_1, ..., 1+\mu_r, 1+e; \frac{c_1^2}{p^2}, ..., \frac{c_r^2}{p^2}, -\frac{a^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि $R(2e+3)>0$, $R(2e+2\mu+3)>0$, $R(\lambda+1)>0$, $p>0$, $a>0$, $c_i>0$, $(i=1, ..., r)$.

विशिष्ट दशाएँ

(i) $c_i=0$, $(i=1, ..., r)$ रखने तथा सुविख्यात सम्बन्ध [1, p. 443]

$${}_2F_1(a, b; c; -x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, G_{22}^{12}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}1-a, 1-b\\ 0, 1-c\end{matrix}\right)$$

का उपयोग करने पर ज्ञात फल [1, p. 422(14)] प्राप्त होता है।

(ii) $i=1$ रखने तथा c_1 को b तथा μ_1 को ν द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty x^{-\lambda-\sigma}\, G_{33}^{12}\left[\frac{x^2}{p^2}\,\middle|\, \begin{matrix}1+\frac{1}{2}\mu, 1-\frac{1}{2}\mu, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{1+\sigma+\lambda}{2}, \frac{3+\mu}{2}, \frac{1+\sigma-\lambda}{2}\end{matrix}\right]$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+2e-\sigma+4), \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu-\sigma+4); 1+\nu, 1+\lambda; -\frac{b^2}{a^2}, -\frac{x^2}{a^2}\right]dx$$

$$= \frac{a^{\lambda+\mu+2e-\sigma+4}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(2e+3)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(2e+2\mu+3)\}\Gamma(1+\lambda)}{2p^{2e+\mu+3}\,\Gamma(1+e)\Gamma(\frac{1}{2}(\mu+2e+\lambda-\sigma+4)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu-\sigma+4)\}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(2e+3), \tfrac{1}{2}(2e+2\mu+3); 1+\nu, 1+e; \frac{b^2}{p^2}, -\frac{a^2}{p^2}\right]$$

क्योंकि $R(2e+3)>0$, $R(2e+2\mu+3)>0$, $R(\lambda+1)>0$, $p>0$, $a>0$, $b>0$.

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, भाग 2, मकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
2. मल्लू, एच० बी०, पीएच० डी० थीसिस, जोधपुर विश्वविद्यालय, 1966.
3. सक्सेना, आर० के०, Monatshefte für Mathematik, 1966, 70, 161-163.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 321-324

आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की ब्रोमीन के साथ अभिक्रियाएँ

श्रीमती के० कानूनगो, एम० डी० रत्नाकर तथा पी० बी० चक्रवर्ती
रसायन विभाग, एम० एल० बाई कन्या महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—फरवरी 20, 1981]

सारांश

ऐल्कोहलिक माध्यम में आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की ब्रोमीन के साथ अभिक्रियाएँ नहीं होतीं। प्रस्तुत अध्ययन में जलीय क्षारीय माध्यम में ब्रोमीन की कुछ आइसोनाइट्रोसो कीटोनों के साथ अभिक्रियाओं का अध्ययन किया गया है। वे कीटोन जिनमें आइसोनाइट्रोसो मूलक हाइड्रोजनरहित कार्बन से जुड़ा हो ब्रोमीन के प्रति अक्रिय पाये गये हैं। इन ब्रोमो आइसोनाइट्रोसो कीटोनों का क्षारीय माध्यम में अवक्षेपण, इन पदार्थों में अम्लीय प्रवृत्ति की अनुपस्थिति अथवा अत्यधिक दुर्बल अम्लीय प्रवृत्ति की उपस्थिति प्रदर्शित करता है।

Abstract

Reactions of isonitroso ketones with bromine. *By* Mrs. K. Kanungo, M. D. Ratnaker and P. B. Chakravarty, Chemistry Department, M. L. B. Girls College, Bhopal.

Although in neutral alcoholic solution the isonitroso ketones do not react with bromine, a bromination product (bromo-isonitroso ketones) could be obtained when the reaction was carried out in aqueous alkaline solution. However the ketone containing isonitroso group attached to a carbon having no hydrogen on it was found inert towards bromine. Precipitation of these bromonitroso ketones from alkaline medium indicates absence of or extremely weak acidic character of these products.

इस अध्ययन में प्रयुक्त आइसोनाइट्रोसो कीटोन निम्नांकित हैं :

(1) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन ($CH_3 \quad CO-CH=NOH$)

(2) डाइ आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन (HON=CH. CO. CH=NOH)

(3) आइसोनाइट्रोसो मेथिल एथिल कीटोन ($CH_3CO \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} CH_3$)

(4) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन (C_6H_5 . CO . CH=NOH)

(5) आइसोनाइट्रोसो स्टाइराइल मेथिल कीटोन (C_6 H_5 . CH=CO CH=NOH)

प्रयोगात्मक

आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की अभिक्रियाओं के अध्ययन[1] के क्रम में शुद्ध आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन, डाइआइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन, आइसोनाइट्रोसो मेथिल एथिल कीटोन, आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन, एवं आइसोनाइट्रोसो स्टाइराइल मेथिल कीटोन की ब्रोमीन के साथ अभिक्रिया का अध्ययन निम्न विधि से किया गया :

आइसोनाइट्रोसो कीटोनों के ब्रोमो व्युत्पन्न मेयर की ब्रोमीन योगात्मक विधि[2] द्वारा प्राप्त किये गये।

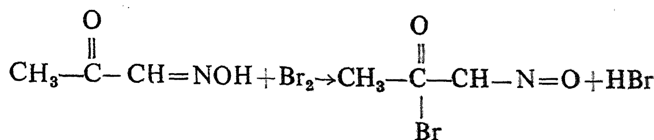
कीटोन को जलीय सोडियम हाइड्राक्साइड की अल्पतम मात्रा में विलीन करके हिमन-मिश्रण में ठंडा किया गया। इस ठंडे किये गये विलयन में धीरे-धीरे ब्रोमीन 0°C से 5°C ताप पर मिलाया गया। प्राप्त अवक्षेप का पुर्नक्रिस्टलन क्लोरोफार्म से करने के बाद गलनांक ज्ञात किया। उत्पाद में उपस्थित ब्रोमीन का आकलन स्टेपेनो[2] की विधि द्वारा किया गया तथा प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

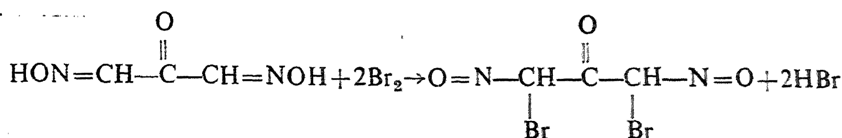
मेयर की ब्रोमीन योगात्मक विधि[3] आइसोनाइट्रोसो कीटोनों के साथ उचित परिणाम देने में असफल रही, क्योंकि आइसोनाइट्रोसो पैराफिन के समान कीटोन ब्रोमीन को ऐल्कोहली विलयन में अवशोषित नहीं कर सके। यदि हम यह मान लें कि आइसोनाइट्रो पैराफिन और आइसोनाइट्रोसो कीटोन दोनों ही आक्साइम हैं (पहिला मोनोकीटोन का और दूसरा 1:2 डाइकीटोन का) और यदि दोनों ही ब्रोमीन के प्रति अक्रिय हों तब परिणाम यह निकाला जा सकता है कि इन दूसरे वर्ग के यौगिकों में आक्साइम गुण की प्रधानता है तथा ये अणु में उपस्थित कार्बोनिल आक्सीजन के इलेक्ट्रोमेरिक प्रभाव द्वारा प्रभावित नहीं होते। अतः यह निष्कर्ष भी निकाला जा सकता है कि नाइट्रोसो ग्रुप बिना इलेक्ट्रोमेरिक प्रभाव के ही यदि इसके पास वाले कार्बन परमाणु से हाइड्रोजन जुड़ा हुआ हो तो आइसोनाइट्रोसो रूप में बदल जाता है[4]।

इस प्रकार ब्रोमो उत्पाद (केवल (III) के प्रकरण के अतिरिक्त) सभी नाइट्रोसोकीटोनों के साथ जलीय क्षारीय माध्यम में प्राप्त हुए। ये उत्पाद पहली बार बनाये गये हैं और इनका कहीं भी वर्णन नहीं मिलता है। चूँकि ये क्षारीय माध्यम में बनाये गये हैं अतः ये ब्रोमोनाइट्रोसो कीटोन हैं, न कि आइसो-

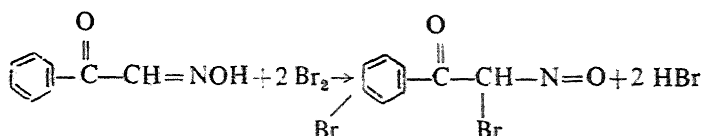
नाइट्रोसो कीटोन जो कि क्षारीय माध्यम में घुलनशील होते। यह ब्रोमोनाइट्रोसो कीटोनों में स्पष्ट रूप से अम्लीय गुण की कमी प्रदर्शित करता है, क्योंकि ये फिर से टाटोमरित नहीं होते। यथा—



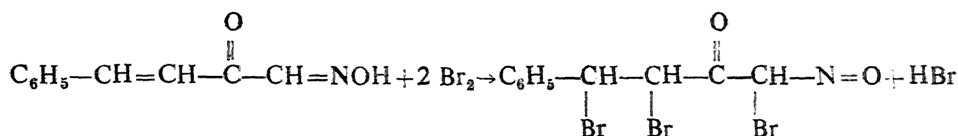
[I] [VI] ब्रोमोनाइट्रोसो ऐसीटोन



[II] [VII] डाइब्रोमोडाइनाइट्रोसो ऐसीटोन



[IV] [VIII] डाइब्रोमोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन



[V] [IX] ट्राइ ब्रोमोनाइट्रोसो स्टाइराइल मेथिल कीटोन

आइसोनाइट्रोसो कीटोन (III) की ब्रोमीन के प्रति अक्रियता इसलिए हो सकती है कि उसमें आइसोनाइट्रोसो मूलक ऐसे कार्बन से जुड़ा है जिसके साथ हाइड्रोजन नहीं है।

सारणी 1

आइसोनाइट्रोसो कीटोन	गलनांक	ब्रोमो व्युत्पन्न	गलनांक	ब्रोमीन प्रतिशत प्राप्त	ब्रोमीन प्रतिशत सैद्धान्तिक
1. आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन ($CH_3-CO-CH{=}NOH$)	69°C	ब्रोमोनाइट्रोसो ऐसीटोन ($CH_3-CO-CH(Br)N{=}O$	86°C	40.9	40.1
2. डाइनाइट्रोसो ऐसीटोन ($HON{=}CH.CO.CH{=}NOH$)	135°C	डाइब्रोमोनाइट्रोसो ऐसीटोन $O{=}N-CH(Br)CO.CH(Br)N{=}O$	150°C	58.6	60.2

3.	आइसोनाइट्रोसो ऐसोटोफिनोन ($C_6H_5CO-CH=NOH$)	123°C	डाइब्रोमोनाइट्रोसो ऐसोटोफिनोन $(Br)C_6H_4CO\ CH\ (Br)\ N=O$	136°C	52.1	51.58
4.	आइसोनाइट्रोसो स्टाइराइल मेथिल कीटोन $C_6H_5CH=CH-CO-CH=NOH$	143°C	ट्राइब्रोमोनाइट्रोसो स्टाइराइल मेथिल कीटोन $C_6H_5-CH(Br)-CH-(Br)-CO-CH(Br)-N=C$	203°C	57.8	56.1

निर्देश

1. कानूनगो, के०, रत्नाकर, एम० डी० तथा चक्रवर्ती, पी० बी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1980, **23**(**4**), 295

2. मेयर इत्यादि, **बर०** 1918, **51**, 1571; 1928, **61**, 1966

3. स्टेपेनो, देखें वोगल, ए० आई०, क्वान्टीटेटिव आर्गेनिक ऐनालिसिस, भाग–3, लांगमैन, लन्दन, 1958 पृष्ठ 657

4. पिलॉटी तथा रफ, **बर०** 1897, **30**, 1656

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 325-328

संयुग्मी श्रेणी के द्वारा फलनों के एक वर्ग के सन्निकटन की कोटि

के० कुरेशी

गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मार्च 5, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक प्रमेय की स्थापना संयुग्मी श्रेणी के द्वारा फलनों के एक वर्ग के सन्निकटन की कोटि को खोज निकालने के उद्देश्य से की गई है।

Abstract

On the degree of approximation of a class of functions by means of a conjugate series. *By* Kutbuddin Qureshi, Department of Mathematics, University of Sagar, Sagar.

In the present paper the author establishes a theorem to find out the degree of approximation of a class of functions by means of a conjugate series.

1. माना कि f एक समाकलनीय फलन है जो आवर्त 2π के साथ आवर्ती है और इसकी फूरियर श्रेणी को

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{nix}, f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-nit}\, dt. \tag{1.1}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। $f(x)$ की फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी

$$-i \sum_{-\infty}^{\infty} S_{gn}(n) f_n e^{nix}, \tag{1.2}$$

है जिसका संगत योगफल फलन

$$\text{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot t/2\, dt \tag{1.3}$$

है जो प्रायः सर्वत्र विद्यमान है।

ऐसी समस्त श्रेणियों या फलनों के वर्ग को L द्वारा सूचित किया जाता है। कोई विन्दु x जिसके लिए $f(x)$ का निश्चित सान्त मान है (L) नियमित कहा जाता है यदि

$$\psi(t)=0(t) \tag{1.4}$$

जहाँ

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t), \tag{1.5}$$

तथा $\mathbf{f}(x)$ का अस्तित्व हो और सान्त हो।

हम (L) नियमित विन्दुओं के समुच्चय को अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में एक दिये हुये फलन $f(x)$ के प्रति $E(\mathbf{L}; f)$ द्वारा नामांकित करते हैं।

हम अनुक्रम $\{\mathbf{S}_k(x)$ के नारलुण्ड माध्य को $t_n[f(x); p_v]$ के द्वारा प्रदर्शित करेंगे। जहाँ

$$\mathbf{S}_n(x)=-i \sum_{-n}^{n} S_{gn}(k) f_k\, e^{kix}, \tag{1.6}$$

तथा $\{p_v\}$ वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है कि

$$P_n=p_0+p_1+p_2+ \dots +p_n \neq 0, \; (n=0, 1, 2, 3, \dots).$$

संयुग्मी फलन $\mathbf{f}(x)$ को प्रायः प्रत्येक x के लिए और विशेषतया $x \subset E(\mathbf{L}; f)$, के लिए निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है

$$\mathbf{f}(x)=-\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\pi} \psi(t) \cot t/2 \, dt. \tag{1.7}$$

फलन $f \epsilon\, Lip\, \alpha (\alpha > 0)$ यदि

$$f(x+h)-f(x)=0(|h|^{\alpha}), \; 0<\alpha \leqslant 1. \tag{1.8}$$

2. खान[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय A

यदि $\left\{\triangle \lambda_{n,k}\right\}_{k=0}^{n}$ k के प्रति अनृण एवं अ-ह्रासमान अनुक्रम हो तथा यदि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant A\psi(t) \text{ जहाँ } 0 \leqslant t \leqslant \delta \tag{2.1}$$

तो

$$\bar{\sigma}_n(x)-\mathbf{f}(x)=0(\psi(1/n)) \tag{2.2}$$

जिसमें $\psi(t)$ ऐसा धनात्मक वर्धमान फलन है कि

$$\int_{1/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = 0(n\psi(1/n)),\ n \to \infty. \tag{2.3}$$

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करना है।

प्रमेय B

एक आवर्ती फलन f की सन्निकटन कोटि को निम्न प्रकार लिखा जाता है यदि आवर्ती फलन f का आवर्त 2π हो और f के लिए संयुग्मी श्रेणी के नारलुण्ड माध्यों द्वारा वर्ग $Lip\ \alpha$ से सम्बद्ध हो

$$|\ \mathbf{t}_n[f(x), p_v] - \mathbf{f}(x)\ | = 0\ \left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{K^{\alpha+1}}\right). \tag{2.4}$$

इस प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित प्रमेयिकाओं का उपयोग किया गया है जो क्रमशः हिले तथा टामारकिन[1] एवं मैकफाडेन[3] की हैं।

प्रमेयिका A

यदि $x \subset E(\mathbf{L}; f)$ तो

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1/n} \mathbf{N}_n(t)\psi(t)dt = 0(1) \tag{2.5}$$

जहाँ

$$\mathbf{N}_n(t) = \{4\pi\, P_n \sin t/2\}^{-1}$$

$$\times\ \left\{e^{-(n+1/2)it} \sum_{k=0}^{n} p_k e^{kit} + e^{(n+1/2)it} \sum_{k=0}^{n} p_k e^{-kit}\right\}. \tag{2.6}$$

प्रमेयिका B

यदि $\{p_n\}$ अनृण तथा अ-वर्द्धमान हो तो $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$; $0 \leqslant t \leqslant \pi$ तथा किसी n के लिए हमें

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k e^{i(n-k)t}\right| \leqslant P(1/t) \qquad \text{किसी } a \text{ के लिए}$$

प्राप्त होता है।

3. प्रमेय की उपपत्ति

$x \subset E(\mathbf{L})$ के लिए

$$\mathbf{t}_n[f(x), p_v] - \mathbf{f}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\pi} \psi(t)\mathbf{N}_n(t)\, dt \tag{3.1}$$

(तुलनार्थ 4.13[1] समीकरण 4.13[1])

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1/n} \psi(t) N_n(t)\, dt + \int_{1/n}^{\pi} \psi(t) N_n(t)\, dt.$$

अत: प्रमेयिका A का उपयोग करने पर

$$t_n[f(x), p_v] - f(x) = 0(1) + \int_{1/n}^{\pi} \psi(t) N_n(t)\, dt.$$

चूँकि

$$N_n(t) = 2\{4\pi P_n \sin t)2\}^{-1} \sum_{k=0}^{n} p_k \cos[k - (n+\tfrac{1}{2})t]$$

अत: हमें प्राप्त होता है

$$| t_n[f(x), p_v] - f(x) | = 2\left[\left| \frac{1}{4\pi P_n} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} p_k \cos[k - (n+\tfrac{1}{2})t]\, dt \right|\right]$$

फलस्वरूप प्रमेयिका B का उपयोग करते हुए

$$|t_n[f(x), p_v] - f(x)| = 0\left[1/P_n \int_{1/n}^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{t} P(1/t)\, dt\right]$$

$$= 0\left[1/P_n \int_{1/n}^{\pi} t^{\alpha}/t\, P(1/t)\, dt\right]$$

$$= 0\left[1/P_n \int_{1/n}^{\pi} t^{\alpha-1} P(1/t)\, dt\right]$$

$$= 0\left[1/P_n \int_{n/1}^{1/\pi} (1/t)^{\alpha-1} P(t)(-dt/t^2)\right]$$

$$= 0\left[1/P_n \int_{n}^{1/\pi} (1/t)^{\alpha+1} P(t)\, dt\right]$$

$$= 0\left[1/P_n \sum_{k=1}^{n} P_k/k^{\alpha \cdot 1}\right]$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक गणित विभाग के अध्यक्ष डा० पी०एल० शर्मा के प्रति बहुमूल्य पथप्रदर्शन के लिए आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. आइनार हिले तथा टामारकिन, जे०डी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1932, **34**, 757-83
2. खान, एच०एच०, इण्डियन जर्न० प्योर० एप्ला० मैथ०, 1975, **6**, 1473-78
3. मैकफाडेन, एल०, ड्यूक० मैथ० जर्न०, 1942, **9**, 168-207

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 329-334

परागोलीय श्रेणी की प्रबल मैट्रिक्स संकलनीयता

ब्रह्मानन्द पाण्डेय
318, बेचूपुर, मुगलसराय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 20, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सामान्य घन कोटियों के लिए परागोलीय श्रेणी की प्रबल मैट्रिक्स संकलनीयता पर कुछ नवीन परिणामों की स्थापना है।

Abstract

On the strong summability of ultraspherical series. *By* Brahma Nand Pandey, 318, Bechupur, Mughal Sarai, Varanasi.

The object of the present paper is to establish new results on the strong matrix summability of ultraspherical series for general positive orders.

1. त्रिभुजाकार मैट्रिक्स $(\Lambda)=(\lambda_{n,k})$ जहाँ $n=0; 1. 2, \ldots,$ तथा $k=0, 1, 2, \ldots,$ तथा $\lambda_{n,k}=0$ क्योंकि $k>n$, नियमित हैं। (नियमित अनुक्रम को अनुक्रम रूपान्तर के रूप में परिमाषित करने के अर्थ में) यदि

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k}=0 \text{ प्रत्येक स्थिर } k \text{ के लिए} \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\lambda_{n,k}| \leqslant M, \; n \text{ से स्वतन्त्र} \tag{1.2}$$

तथा

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma\lambda_{n,k}=1. \tag{1.3}$$

श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ आंशिक $\{S_n\}$ के अनुक्रम सहित प्रबल संकलनीय (Λ) या योगफलों S में संकलनीय $[\Lambda]$

कहलाती है यदि

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \mid S_k - S \mid = 0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty.$$

निम्नलिखित तीन दशाओं में

(a) $\lambda_{n,k} = \frac{1}{n+1} \ (k \leqslant n)$

(b) $\lambda_{n,k} = \frac{1}{(k+1) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}} \ (k \leqslant n)$

(c) $\lambda_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}} \ (k \leqslant n)$

संकलनीयता [Λ] क्रमशः चेजारो संकलनीयता $[C, 1]$, रीज संकलनीयता जो $[R, \log n, 1]$ के तुल्य है तथा नारलुण्ड संकलनीयता $[N, 1/n+1]$ का रूप धारण कर लेती है।

श्रेणी Σa_n को घातांक $q(q>0)$ सहित योगफल S में प्रबलतः संकलनीय कहा जाता है यदि आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ का अनुक्रम ऐसा हो कि

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \mid S_k - S \mid^q = 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty.$$

2. माना कि $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जो परास $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ तथा $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ के लिए परिभाषित है। गोला S पर $f(\theta, \phi)$ के संगत परागोलीय श्रेणी

$$f(\theta, \phi) \sim 1/2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_S \int \frac{f(\theta', \phi') P_n^{(\lambda)}(\cos w) \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[\sin^2 \phi' \sin^2 (\phi - \phi')]^{(1-2\lambda)/2}} \quad (2.1)$$

होगी जहाँ $\cos w = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$ तथा परागोलीय बहुपदों $P_n^{(\lambda)}(x)$ को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है

$$(1-2xt+t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(x), \ \lambda > 0.$$

गोले पर $f(\theta, \phi)$ के सार्वीकृत माध्यमान की परिभाषा कागबेतलियांज[4] ने निम्न प्रकार से की है

$$f(w) = \frac{1}{2\pi (\sin w)^2} \int_{Cw} \frac{f(\theta', \phi') \, ds'}{[\sin^2 \theta' \sin^2(\phi - \phi')]^{(1-2\lambda)/2}} \quad (2.2)$$

जहाँ समाकल लघु वृत्त C से होकर लिया जाता है जिसका केन्द्र गोले S पर (θ, ϕ) है और जिसकी Curvilinear त्रिज्या w है।

अब श्रेणी (2.1)

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_0^{\pi} f(w) \sin^{2\lambda} w\, P_n^{(\lambda)} (\cos w) dw. \qquad (2.3)$$

में समानीत हो जाती है।

हम लिखेंगे

$$\phi(w) = (f(w) - A)\, (\sin w)^{2\lambda-1},$$

जहाँ A स्थिर अचर हैं।

3. हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

माना $\phi(w) \epsilon\, BV(\eta. \pi)$, जहाँ $\eta = \frac{\mu}{n\Delta}, \frac{1-\lambda}{\lambda} > \triangle > 0, 0 < \lambda < 1$ तथा μ एक दीर्घ अचर है। यदि

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\, \phi(w)\, | dw = O[t^a \{\xi(1/t)\}^{1+k}]_{k>0} \qquad (3.1)$$

जहाँ $\xi(t)$ t का ऐसा धनात्मक फलन है कि $\xi(t) \to 0$, ज्योंज्यों $t \to 0$ तथा $a = (2\lambda + 1 - \triangle)/\triangle$, ज्यों ज्यों $t \to 0$, तो श्रेणी (2.1) मान A तक घातांक $q (q > 0)$ सहित संकलनीय [Λ] है बशर्ते कि (Λ) नियमित रहे।

4. प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

([3], 171) $\lambda > 0$ के लिए हमें ज्ञात है कि

$$P_n^{(\lambda)} (\cos \theta) = \begin{cases} \theta^{-\lambda} O(n^{\lambda-1}), & c/n \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ O(n^{2\lambda-1}), & 0 \leqslant \theta \leqslant c/n, \end{cases}$$

तथा

$$(\sin \theta)^{\lambda}\, |\, P_n^{(\lambda)} (\cos \theta)\, | < 2^{1-\lambda} \{\Gamma(\lambda)\}^{-1}\, n^{\lambda-1}, 0 < \lambda < 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

प्रमेयिका 2

([3], 84) $n \geqslant 0$, के लिए हमें ज्ञात है कि

$$d/dx\, \{P_n^{(\lambda)} (x)\} = 2\lambda P_n^{(\lambda+1)} (x),\ P_{-1}^{(\lambda)} (x) = 0.$$

5. प्रमेयिका की उपपत्ति

माना कि S_n श्रेणी (2.1) के nवें आंशिक योगफल को द्योतित करता है तो हमें प्राप्त होता है कि[3]

$$S_n=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi f(w)\sum_{k=0}^{n}(k+\lambda)\,P_k^{(\lambda)}(\cos w)\,(\sin w)^{2\lambda}\,dw$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi f(w)\left[\frac{d}{dx}\{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)+P_n^{(\lambda)}(x)\}\right]_{X=\cos w}(\sin w)^{2\lambda}\,dw$$

अत:

$$S_n-A=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi \phi(w)\,\frac{d}{dw}\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)+P_n^{(\lambda)}(\cos w)dw\}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi \phi(w)\,\frac{d}{dw}\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)dw$$

$$+\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi \phi(w)\,\frac{d}{dw}\,P_n^{(\lambda)}(\cos w)dw$$

$=J_1+J_2$, माना।

प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें दिखाना होगा कि

$$\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\,|\,S_v-A\,|^q=0(1),\ \text{ज्यों ज्यों}\ n\to\infty.$$

अब मिनकोव्स्की की असमिका को सम्प्रयुक्त करने पर

$$\left\{\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\,|\,S_v-A\,|^q\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\,|\,J_1\,|^q\right\}^{1/q}+\left\{\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\,|\,J_2\,|^q\right\}^{1/q}$$

$$=(\Sigma_1)^{1/q}+(\Sigma_2)^{1/q},\ \text{माना।}$$

अब हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे

$$J_1=\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\pi \phi(w)\,\frac{d}{dw}\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)dw\right|$$

$$=\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^\eta \phi(w)\,\frac{d}{dw}\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)dw\right|$$

$$+\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_{\eta}^{\pi}\phi(w)\frac{d}{dw}P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)dw\right|$$

$=|J_{1\cdot1}|+|J_{1\cdot2}|$, माना ।

किन्तु

$$|J_{1\cdot1}|=O(n^{2\lambda+1})\int_0^{\eta}w\,|\phi(w)|\,dw$$

$$=O(n^{2\lambda+1})\,\eta\,.\,\eta^{a}\{\xi(n)\}^{1+k}$$

$$=O(n^{2\lambda+1})\,n^{-\Delta(a+1)}\{\xi(n)\}^{1+k}$$

$$=O\{\xi(n)\}^{1+k},\ k>0$$

$=0(1)$, ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

तथा

$$|J_{1\cdot2}|=\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_{\eta}^{\pi}\phi(w)\frac{d}{dw}\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)\}dw\right|$$

$$=\left|\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\left[-\int_{\eta}^{\pi}d\phi(w)\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\{\phi(w)P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)\}_{\eta}^{\pi}\right]\right|$$

$$=O(n^{\lambda-1})\,\eta^{-\lambda}$$

$$=O(n^{\lambda-1+\Delta\lambda})$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{1-\lambda-\Delta\lambda}}\right)$$

$=0(1)$, ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

अतः

$$\Sigma_1=\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\,|J_1|^{q}$$

$$=0\left\{\sum_{v=1}^{n}\lambda_{n,v}\right\}$$

$=0(1)$, (1.3) से ज्यों ज्यों $n\to\infty$,

तथा

$$(\Sigma_1)^{1/q}=0(1).$$

जैसा कि $(\Sigma_1)^{1/q}$ के लिए किया था उसी का अनुसरण करते हुये दिखाया जा सकता है कि

$$(\Sigma_2)^{1/q}=0(1).$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी

यदि $\alpha>\dfrac{2\lambda+1-\triangle}{\triangle}$, तो हम (3.1) को निम्नलिखित प्रतिबन्ध द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं :

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t|\phi(w)|dw=O[t^\alpha].$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० एल०एम० त्रिपाठी ने जो सुझाव दिए उसके लिए लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. यादव, एस०पी०, **इण्डियन जर्न० प्योर० एप्लाइड मैथ०**, 1979, **10**, 1076-81
2. कागवेतलियांज, ई०, J. Mathematiques, 1924, **3**, 107-67
3. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomials. Colloq. Publ. भाग 23, तृतीय संस्करण Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981 Pages, 335-339

अर्ध R_1 सांस्थितिक समष्टियाँ

आर० प्रसाद तथा आर०एस० यादव
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मई 20, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने एक नवीन अभिगृहीत (axiom) का परिचय दिया है और कतिपय ज्ञात पृथक्करण अभिगृहीतों से इसके सम्बन्ध का अध्ययन किया है जिससे कुछ ज्ञात प्रमेयों के सार्वीकरण प्राप्त हुए हैं।

Abstract

Semi R_1 topological spaces. *By* R. Prasad and R. S. Yadav, Department of Mathematics and Statistics, University of Saugar, Sagar.

In the present paper the authors have introduced a new separation axiom and studied its relationship with some of the known separation axioms, yielding generalizations of some of the known theorems.

1. प्रस्तावना

1961 में डेविस[3] ने सांस्थितिक समष्टियों के लिए नियमितता अभिगृहीतों (regularity axioms) को परिभाषित किया और उनका अध्ययन किया। इनमें से R_1-अभिगृहीत की महत्वपूर्ण भूमिका है जिसकी विस्तृत परीक्षा मुर्डेश्वर तथा नायमपल्ली ने सन् 1966 में की। कुछ ज्ञात फलों में उन्होंने परिकल्पना में T_2 से R_1 में कुछ दुर्बलता बताई। R_1-अभिगृहीत T_0 तथा T_1 से भी स्वतन्त्र है किन्तु T_2 की अपेक्षा दुर्बल है। फिर भी $T_2 = R_1 + T_0$ लागू होता है।

माहेश्वरी तथा प्रसाद[5,6] ने T_0, T_1, T_2 तथा R_0 के संकेतनों में विवृत (open) के स्थान पर अर्धविवृत रखकर क्रमशः अर्ध T_0, अर्ध T_1, अर्ध T_2 तथा $(R_0)_s$ की संकल्पनाओं का सूत्रपात किया। अर्ध विवृत समुच्चयों की संकल्पना का शुभारम्भ लेवीन[4] द्वारा किया गया और वह निम्नवत् है :

परिभाषा 1.1

सांस्थितिक समष्टि X में एक समुच्चय A अर्धविवृत कहलाता है यदि एक विवृत समुच्चय 0 विद्यमान है जिससे $0 \subset A \subset cl0$, जहाँ $cl0$ X में 0 की संवृत्ति को सूचित करता है।

प्रत्येक विवृत समुच्चय अर्धविवृत है किन्तु इसका विपरीत सही नहीं है।[4] अर्धविवृत समुच्चय का पूरक अर्धसंवृत कहलाता है। समुच्चय A से युक्त समस्त अर्धसंवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ A_1 का अर्धसंवृत कहलाता है[2] और $scl\ A$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। दास ने देखा है कि $A \subset sclA \subset clA$ और सामान्यत: ये inclusions उत्क्रमणीय नहीं होते। लेवीन ने आगाह किया है कि दो अर्धविवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ अर्धविवृत नहीं भी हो सकता।

परिभाषा 1.2[7]

कोई सांस्थितिक समष्टि X s-सांस्थितिक कहलाती है यदि अर्धविवृत समुच्चयों की परिमित संख्या का सर्वनिष्ठ अर्धविवृत रहे। प्रत्येक s-सांस्थितिक समष्टि सांस्थितिक समष्टि है किन्तु इसका विलोम नहीं है[7]।

परिभाषा 1.3[8]

अर्ध विवृत समुच्चयों का परिवार $\{G_i\}$ सांस्थितिक समष्टि के लिए s-आवृत कहलाता है यदि $X = U_i\{G_i\}$.

प्रत्येक विवृत आवृत (cover) s-आवृत है किन्तु इसका विलोम सही नहीं है।[8]

परिभाषा 1.4[8]

सांस्थितिक समष्टि X को s-संहत कहा जाता है यदि X के प्रत्येक s-आवृत का परिमिति उप-आवृत न हो।

निर्देश[8] में यह बताया गया है कि संहतता से s-संहतता की संकल्पना अधिक प्रबल है।

परिभाषा 1.5[1]

माना X तथा Y दो सांस्थितिक समष्टियाँ हैं। कोई फलन $f: X \to Y$ अखंडनीय कहलाता है यदि Y के प्रत्येक अर्धविवृत उपसमुच्चय का व्युत्क्रम बिम्ब X में अर्धविवृत हो।

यह भलीभाँति ज्ञात है कि एक विवृत संतत फलन अखंडनीय है[1]।

परिभाषा 1.6[3]

सांस्थितिक समष्टि X को R_1 कहते हैं यदि X के x, y बिन्दुओं के प्रत्येक युग्म के लिए जिससे कि $cl\{x\} \neq cl\{y\}$, ऐसे असंयुक्त विवृत युग्म U तथा V हों कि $x \epsilon U$ तथा $y \epsilon V$.

2. अर्ध R_1 समष्टियाँ

परिभाषा

सांस्थितिक समष्टि X को अर्ध R_1 कहते हैं यदि $x, y \in X$ बिन्दुओं के प्रत्येक युग्म के लिए जिससे कि $scl\{x\} \neq scl\{y\}$. ऐसे असंयुक्त अर्धविवृत समुच्चय U तथा V हों कि $x \in U$ तथा $y \in V$.

उदाहरण 2.1

माना $X=\{a, b, c\}$ तथा $\mathscr{T}=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, तो $(X, \mathscr{T})$ अर्ध R_1, T_0 तथा $(R_0)_s$ है किन्तु यह R_1, R_0 तथा T_1 नहीं है।

उदाहरण 2.2

माना $X=\{a, b, c, d\}$, तथा $\mathscr{T}=\{\phi, X, \{d\}, \{b, c\}; \{b, c, d\}\}$ तो $(X, \mathscr{T})$ अर्ध R_1 है T_0 नहीं अतः यह अर्ध किन्तु अर्ध T_1 भी नहीं है।

उदाहरण 2.3

माना $X=\{a, b, c, d\}$ तथा $\mathscr{T}=\{\phi, \{a\}, X\}$ तो $(X, \mathscr{T})$ अर्ध T_0 समष्टि है किन्तु अर्ध R_1 नहीं है।

टिप्पणी 2.1 : उदाहरण 2.2 तथा 2.3 बताते हैं कि अर्ध T_0 तथा R_1 स्वतन्त्र हैं।

उदाहरण 2.4

माना सह-परिमित संस्थिति से युक्त समस्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय X है। तब X के T_1 होने के कारण अर्ध T_1 होता है। यह अर्ध R_1 नहीं होता क्योंकि कल्पना कीजिए कि X अर्ध R_1 है और माना कि $x, y \in X$ ऐसे हैं कि $x \neq y$ तथा $scl\{x\} \neq scl\{y\}$। चूँकि X अर्ध R_1 है अतः असंयुक्त अर्ध विवृत समुच्चय U तथा V होते हैं जिससे $x \in U$ तथा $y \in V$। तब $V \subset x \sim U$ किन्तु U के अर्धविवृत होने से उसमें एक अरिक्त विवृत समुच्चय होता है अतः $X \sim U$ परिमित है, किन्तु V अपरिमित है क्योंकि इसमें एक अरिक्त अपरिमित विवृत समुच्चय होता है जो विरोधाभास है। फलस्वरूप X अर्ध R_1 नहीं है।

टिप्पणी 2.2 : उदाहरण 2.2 तथा 2.4 दोनों मिलकर यह बताते हैं कि अर्ध T_1 तथा अर्ध R_1 के अभिगृहीत स्वतन्त्र हैं।

प्रमेय 2.1

प्रत्येक अर्ध T_2 समष्टि अर्ध R_1 है।

प्रमेय 2.2

समष्टि X अर्ध T_2 है यदि और केवल यदि यह अर्ध R_1 तथा T_0 है।

उपपत्ति

कल्पना किया कि X अर्ध R_1 तथा अर्ध T_0 है। माना कि $x, y \in X$ तथा $x \neq y$। चूँकि X अर्ध T_0 है अतः सार्विकता में किसी प्रकार क्षति हुए बिना मान लिया कि एक अर्धविवृत समुच्चय U विद्यमान है जिसमें x है किन्तु y नहीं है। तब $x \sim U$ एक अर्धसंवृत समुच्चय है जिसमें y की अर्धसंवृति होती है तथा $y \epsilon X \sim U$। चूँकि $x \notin X \sim U$, अतः $scl\{x\} \neq scl\{y\}$। इससे तथा X के अर्ध R_1 होने से यह अनुगमन होता है कि X अर्ध T_2 है।

इसकी आवश्यकता स्वतः स्पष्ट है।

प्रमेय 2.3

प्रत्येक अर्ध R_1 समष्टि $(R_0)_S$ है।

उपपत्ति

माना X एक अर्ध R_1 समष्टि है तथा Gx का अर्धविवृत उप समुच्चय है। यदि $x \epsilon G$, तो प्रत्येक $y \epsilon X \sim G$, के लिए $scl\{x\} \neq scl\{y\}$ चूँकि। X अर्ध R_1 है अतः U तथा V असयुक्त अर्धविवृत समुच्चय विद्यमान होते हैं जिनमें क्रमशः x तथा y पाये जाते हैं। इससे यह अनुगमन होता है कि $y \notin scl\{x\}$ अतः $scl\{x\} \subset G$.

उपप्रमेय

सांस्थितिक समष्टि अर्ध R_1 होता है यदि तथा केवल यदि प्रत्येक युग्म $x, y \epsilon X$, $scl\{x\} \neq scl\{y\}$, के लिए असंयुक्त अर्धविवृत समुच्चय U तथा V विद्यमान हों जिससे कि $scl\{x\} \subset U$ तथा $scl\{y\} \subset V$.

प्रमेय 2.4

यदि A अर्ध R_1 s-सांस्थितिक समष्टि का विवृत s-संहत उपसमुच्चय हो और यदि $scl\{x\} \cap A = \phi$, तो A तथा x वाले अर्धविवृत समुच्चय विद्यमान होते है।

उपपत्ति

प्रत्येक $y \epsilon A$ के लिए $scl\{x\} \neq scl\{y\}$ अतः क्रमशः x तथा y वाले असंयुक्त अर्धविवृत समुच्चय U_y तथा V_y विद्यमान होते हैं। संग्रह $\{A \cap V_y : y \epsilon A\}$ A का एक s-आवृत है, इसके s-संहत होने के कारण A में ऐसे बिन्दु $y_1 \ldots y_m$ विद्यमान रहते हैं कि $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} (A \cup V_{y_i}) = V$ (माना)। यदि $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$, तो $A \subset V$, $x \epsilon U$ तथा $U \cap V = \phi$.

प्रमेय 2.5

यदि f तथा g किसी s-सांस्थितिक समष्टि X से अर्ध R_1 समष्टि y तक दो अखण्डनीय फलन हों तो समुच्चय $A = \{x : scl\{f(x)\} = scl\{f(x)\}\}$ अर्धसंवृत होता है।

उपपत्ति

किसी भी $x \epsilon X$ के लिए जिससे $x \notin A$, तो हमें $scl\{f(x)\} \neq scl\{g(x)\}$ प्राप्त होगा। चूँकि Y अर्ध R_1 है अतः दो असंयुक्त अर्धविवृत समुच्चय U तथा V विद्यमान होते हैं जिनमें क्रमशः $f(x)$ तथा $g(x)$ होता है। f तथा g के अखण्डनीय फलन होने से यह ज्ञात होता है कि $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ अर्धविवृत समुच्चय है जिसमें x रहता है। तब $A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) = \phi$ अन्यथा $y \epsilon A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V))$ विद्यमान होता है। इसलिए $f(y) \epsilon U$ तथा $g(y) \epsilon V$ एवं $f(y) = g(y)$। किन्तु U तथा V असंयुक्त हैं जो विरोधाभास प्रस्तुत करता है। इस प्रकार $x \epsilon f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X \sim A$. X के s-सांस्थितिक समष्टि होने से हमें ज्ञात होता है कि $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ X में अर्धविवृत है। इस प्रकार $X \sim A$ अर्धविवृत समुच्चयों का सम्मेल है अतः $X \sim A$ अर्धविवृत है जिसका अर्थ है कि A अर्धसंवृत होता है।

प्रमेय 2.6

यदि s-सांस्थितिक अर्ध R_1 समष्टि X से स्वयं तक में अखण्डनीय न हो तो समुच्चय $A = \{x : scl\{f(x)\} = scl\{x\}\}$ अर्धसंवृत होता है।

इसकी उपपत्ति प्रमेय 2.5 की तरह है।

निर्देश

1. क्रासजे, एन० जी० तथा हिल्डेब्रांड्ट, एस० के०, **फण्डा० मैथ०**, 1972, LXXIV, 233-254
2. दास, पी० Prog. Math., 1973, **7**, 33-44
3. डेविस, ए०एस०, Amer. Math. Monthly, 1961, **68**, 886-893
4. लेवीन, एन०, Amer. Math. Monthly, 1963, **70**, 36-41
5. माहेश्वरी, एस०एन० तथा प्रसाद, आर०, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1975, **89**, 339-345
6. वही, Port. Math., 1975, **34**, 213-217
7. प्रसाद, आर०, **पी० एच० डी०** थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1976
8. प्रसाद, आर० तथा यादव, आर० एस० (प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 341-346

जलीय अम्लों में पेनिसिलिन का जलअपघटन

एम० डी० पटवर्धन, बी० के० आनन्द तथा सी० वी० लघाटे

रसायन विभाग, राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शिवपुरी (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 21, 1981]

सारांश

0.3 से 3 M सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में पेनिसिलिन के जलअपघटन का दर उच्चिष्ट क्रमश: 0.7 तथा 1.5M पर पाया गया। सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में आयनिक शक्ति प्रभाव के आंकड़ों से विदित होता है कि लवण प्रभाव ऋणात्मक है जिसके फलस्वरूप अम्ल उत्प्रेरित तथा उदासीन दरों का पृथक्करण सम्भव है।

Abstract

Hydrolysis of penicillin in aqueous acids. *By* M. D. Patwardhan, B. K. Anand and C. V. Laghate, Department of Chemistry, Government Post-graduate College, Shivpuri (M. P.).

Hydrolysis of sodium penicillin in 0.3 to 3 M sulphuric and perchloric acid has a rate maximum at 0.7 and 1.5 M respectively. Ionic strength effect data in sulphuric and perchloric acids (sodium sulphate, lithium sulphate and sodium perchlorate) shows negative salt effect and permits the separation of acid catalysed and neutral rates.

पेनिसिलिन का β लैक्टम वलय[1] विभिन्न न्यूक्लियोफाइलों, अम्ल-क्षारक अभिकर्मकों, धातु आयनों[2,3] तथा जल सदृश विलायकों के प्रति मुखर प्रवृत्ति के द्वारा अभिलक्षित है। विभिन्न शोध-कर्ताओं[4, 5, 6] ने जलीय विलयनों में पी-एच, ताप, आयनिक शक्ति, धातु आयनों तथा एंजाइमों के प्रभाव का अध्ययन किया है। जलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में पेनिसिलिन के जलअपघटन का क्रमबद्ध गतिक अध्ययन किया जा चुका है[7]। इसके फलस्वरूप यह ज्ञात हुआ है कि जलअपघटनी अभिक्रिया द्विअणुक है और अभिक्रिया दर जल सक्रियता पर आश्रित है[8]। इसके लिए क्रियाविधि की सम्भावित रूपरेखा भी

प्रस्तुत की जा चुकी है। प्रस्तुत प्रपत्र में जलीय सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में पेनिसिलिन के जल अपघटन का अध्ययन दिया जा रहा है।

प्रयोगात्मक

सोडियम पेनिसिलिन 1630 यूनिट/मिग्रा० का प्रयोग किया गया। पेनिसिलिन के जलअपघटन (0.002 M) का अनुगमन फार्मोल अनुमापन विधि द्वारा किया गया[8]। इससे प्रथमकोटिक दर गुणांक प्राप्त हुए। आयनिक शक्ति को स्थायी रखने के लिए सोडियम सल्फेट, लिथिमम सल्फेट तथा सोडियम परक्लोरेट का प्रयोग किया गया। प्रयुक्त सभी अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे।

परिणाम तथा विवेचना

0.3 से 3.0 M सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में पेनिसिलिन के जलअपघटन से क्रमशः 0.7 तथा 1.5 M पर दर उच्चिष्ठ प्राप्त होते हैं जिस प्रकार ऐमाइडो[9] तथा लैक्टमों[10] में देखा गया है (देखें सारणी 1)। सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में आयनिक शक्ति के प्रभाव का अध्ययन कई आयनिक शक्तियों पर किया गया (देखें सारणी 2 तथा 3) जिससे कि दरों की वृद्धि दर उच्चिष्ठ तथा अम्ल उत्प्रेरण की प्रभावात्मकता ज्ञात की जा सके[11]।

प्राप्त आँकड़ों से निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

(1) प्रत्येक आयनिक शक्ति पर अम्ल सान्द्रता में वृद्धि करने से अम्ल उत्प्रेरित जलअपघटन की दरें घटती हैं।

(2) आयनिक शक्ति में वृद्धि के साथ आलेखों के प्रवणों में ह्रास आता है जिससे ऋणात्मक लवण प्रभाव दृष्टिगोचर होता है।

(3) दर अक्ष पर विभिन्न अंतःखण्ड यह सूचित करते हैं कि उदासीन दरों का योगदान एक सा नहीं होता है।

इस प्रकार सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्लों में पेनिसिलिन का जलअपघटन न केवल संयुग्मी अम्ल द्वारा बल्कि उदासीन दरों के द्वारा नियन्त्रित होता है जिसे निम्न प्रकार से दर्शित किया जा सकता है[10]

$$\log ke = K_H \,.\, e\, b_H + \mu \,.\, C_{H^+} + K_{N_0} \,.\, e\, b_N \,.\, \mu.$$

जहाँ Ke, K_{H0}, K_{N0}, $b_{H^+} + b_N$ तथा μ क्रमशः प्रेक्षित दरों, शून्य आयनिक शक्ति पर विशिष्ट अम्ल उत्प्रेरित दर, अचर तथा आयनिक शक्ति के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

सारणी 4 में K_{H0}, K_{N0}, a_{H^+} तथा b_N के मान सारणीबद्ध किये गये हैं। यह देखा जाता है कि H_2O को सम्मिलित कर लेने के बाद भी उपर्युक्त समीकरण से परिगणित सैद्धान्तिक दरों का योगफल

प्रयोगात्मक मानों से मेल नहीं खाता (सारणी 5)। उच्चतर दरें सम्भवतः आयनिक त्वरण के फलस्वरूप हैं। इस प्रकार आयनिक शक्ति प्रभाव आंकड़ों के लिए डेबाई-हुकेल समीकरण लागू नहीं है। आंकड़ों से अम्ल उत्प्रेरण की प्रभावात्मकता का क्रम निम्न प्रकार पाया गया:

सल्फ्यूरिक अम्ल>हाइड्रोक्लोरिक अम्ल>परक्लोरिक अम्ल

संयुग्मी अम्ल प्रजातियों के माध्यम से पेनिसिलिन के जलअपघटन की क्रियाविधि प्रस्तावित की गई है।

सारणी 1

30° पर सल्फ्यूरिक तथा परक्लोरिक अम्ल में पेनिसिलिन का जलअपघटन

H_2SO_4 (M)	0.3	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
10^5k sec.$^{-1}$	6.4	9.2	5.2	4.6	4.0	—	3.1
M($HClO_4$)	0.4	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
10^5k sec.$^{-1}$	2.0	2.6	5.0	7.0	6.7	3.9	2.8

सारणी 2

30° पर सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट तथा सल्फ्यूरिक अम्ल-लिथियम सल्फेट में पेनिसिलिन का जलअपघटन

H_2SO_4 (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$	H_2SO_4 (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$	H_2SO_4 (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$
				सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट				
0.0	0.5	7.6	0.1	1.0	6.6	0.2	2.0	5.8
0.1	0.5	6.8	0 3	1.0	5.0	0.5	2.0	5.1
0.2	0.5	5.2	0.5	1.0	3.4	0.1	2.0	3.2
0.3	0.5	2.7	0.5	1.0	1·9	1.5	2.0	2.6
0.4	0.5	2.2						
				सल्फ्यूरिक अम्ल-लिथियम सल्फेट				
0.0	0.7	5.0	0.0	1.0	8.8	0.5	2.0	8.1
0.1	0.7	3.4	0.1	1.0	8.7	0.6	2.0	5.9
0.3	0.7	3.2	0.3	1.0	8.0	0.7	2.0	4.3
0.5	0.7	1.8	0.5	1.0	7.0	1.0	2.0	3.2
			0.8	1.0	4.4	1·5	2.0	2.7

सारणी 3

परक्लोरिक अम्ल-सोडियम परक्लोरेट में पेनिसिलिन का जलअपघटन

$HClO_4$ (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$	$HClO_4$ (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$	$HClO_4$ (M)	μ	10^5k sec.$^{-1}$
0.0	0.5	6.7	0.0	1.0	7.6	0.0	1.5	8.3
0.1	0.5	6.0	0.1	1.0	6.6	0.2	1.5	7.1
0.3	0.5	5.0	0.3	1.0	5.4	0.5	1.5	3.9
0.4	0.5	3.5	0.4	1.0	5.2	0.7	1.5	2.9
			0.7	1.0	5.1	1.0	1.5	1.8

सारणी 4

आयनी शक्ति प्रभाव आंकड़ों से पेनिसिलिन के जलअपघटन के लिए विशिष्ट अम्ल तथा उदासीन गतियाँ

k_{N_0}	$H_2SO_4-Na_2SO_4$	$H_2SO_4-Li_2SO_4$	$HCl-NaCl$	$HCl-NaClO_4$
k_{H_0}	3.33	2.66	3.1	2.7
k_{N_0}	2.90	2.55	2.27	2.7
b_{H^+}	0.37	0.14	0.50	0.16
b_N	0.05	0.30	0.18	0.12

सारणी 5

स्थिर आयनिक शक्ति पर पेनिसिलिन के जलअपघटन के लिए परिगणित अम्ल उत्प्रेरित तथा उदासीन गतियाँ

सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट							
H_2SO_4 (M)	0.3	0.7	1.0	1.5	2.0	3.0	
अम्ल गतियां	1.20	4.0	6.31	11.2	17.4	36.0	
उदासीन गतियां	4.36	5.7	7.0	10.0	14.1	28.18	
सल्फ्यूरिक अम्ल-लिथियम सल्फेट							
H_2SO_4 (M)	0.3	0.7	1.0	1.5	2.0	3.0	
अम्ल गतियां	5.2	8.7	9.5	9.4	8.1	5.5	
उदासीन गतियां	7.7	7.4	7.0	6.7	6.3	5.6	
परक्लोरिक अम्ल-सोडियम परक्लोरेट							
$HClO_4$ (M)	0.4	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
अम्ल गतियां	1.5	4.53	7.24	13.0	21.0	31.4	45.4
उदासीन गतियां	5.5	6.0	6.6	7.6	8.7	10.0	11.48

गतियां $= 10^5$ sec.$^{-1}$

निर्देश

1. हिन्दुस्तान एंटीबायोटिक बुलेटिन, अगस्त 1973, **16(1)**
2. चैन, ई० डी०, फिलपाट, ई० जे० तथा कैलो, डी०, *Arch. Biochem. S.*, 1948, 171.
3. क्रेसमेन, डब्लू०, ए०, यूजिटा, ई० टी०, डोहीरियो, जे० टी० तथा नीबरगाल, पी०, *Pharmaceol*, 1966, **18**, 801.
4. बेनेडिक्ट, आर० जी०, श्मिट, डब्लू० एच०, कागहिल, आर० डी० तथा अल्सन, ए० पी०, *Bacteriol.* 1945, **49**, 85.
5. फिनहोल्ट, पी०, जुंगन्सन, जी० तथा क्रिस्टकौसिन, एच०, *J. pharm. Sci.*, 1965, **54**, 87.
6. आंग, टी० एच० तथा कोस्टेनबांडर, एच० बी०, *J. pharm Sci.* 1975, **8**. 64.
7. पटवर्धन, एम० डी०, मुकर्जी, पी० पी०, आनन्द, बी० के० तथा म्हाला, एम० एम०, *Journal of Jewaji University*, 1978, **6(2)**.
8. सोरेंसन, एस० पी० एल०, *Biochem. Z*, 1907.
9. म्हाला, एम० एम० तथा जगदाले, एम० एच० , *Ind. J. Chem.* 1968, 711-713.
10. म्हाला, एम० एम० तथा किलेदार, ए० वी०, *J. I. C. S.*, 1976, 976-79.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 347-354

क्षारीय मृदा के सुधार हेतु निक्षालन एवं विभिन्न सुधारकों का प्रभाव

सतीश चन्द्र जौहरी तथा मुरारी मोहन वर्मा
शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त–अक्टूबर 23, 1979]

सारांश

जिप्सम अथवा पाइराइट (क्रमश: 8.5 टन/हे० तथा 6.5 टन/हे० की दर से) तथा कार्बनिक पदार्थ के रूप में पुआल एवं ढैंचा की हरी खाद का उपयोग करते हुए निक्षालन करके लवण-क्षारीय मृदा में धान (साकेत–4) की फसल बोई गई। इस अकृष्य मृदा में 140 कि० ग्रा०/हे० नाइट्रोजन, (अम्लोत्पादक उर्वरक अमोनियम सल्फेट द्वारा), 60 कि० ग्रा०/हे० फास्फेट, 60 कि० ग्रा०/हे० पोटाश तथा 25 कि० ग्रा०/हे० जिंक सल्फेट प्रयोग करके पहले वर्ष 6.98 कु०/हे० तथा दूसरे वर्ष 31.34 कु०/हे० धान की उपज ली गई। पुआल के साथ पाइराइट के परिणाम उत्तम रहे। मृदा सुधारकों पर व्यय 2489 रु०/हे० आया।

Abstract

Effect of leaching and ameliorants on reclamation of alkali soils. *By* Satish Chandra Jauhari and Murari Mohan Verma, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

Saline-alkali soil has been reclaimed to a sufficient extent within 2-3 years by the use of gypsum or pyrite @ 8.5 tons or 6.5 tons hectare respectively along with organic matter through paddy-straw and green manuring of dhaincha (*Sesbania aculeata*). 140 kg/ha N (applied through acid producing fertilizer-ammonium sulphate), 60 kg/ha phosphate, 60 kg/ha potash and 25 kg/ha zinc sulphate applied after reclamation in each crop gave 6.98 q/ha paddy grain yield in the first year and 31.34 q/ha in the second year from the soil which was practically non-productive. The cost of reclamation came to Rs. 2489/ha.

विभिन्न देशों में ऊसरों के सुधार पर प्रचुर शोधकार्य हो चुका है।[1–5] हमारे देश में प्रो० धर[6] ने क्षारीय मृदाओं के सुधार के सम्बन्ध में काफी कार्य किया है। इधर दो प्रमुख सुधारक प्रयोग में लाये जा

रहे हैं। जिप्सम द्वारा क्षारीय मिट्टियों को सुधार शर्मा[7] ने किया है। पाइराइट को सुधारक के रूप में एब्राल तथा डर्गन[8], डर्गन तथा अन्य[9], एब्राल, गोल तथा आचार्य[10], तथा मेहता एवं एब्राल[11] ने प्रयुक्त किया है। कुछ वर्षों से बिहार की अमझोर लौह खानों से प्राप्त पाइराइट पूर्वी उत्तर प्रदेश तथा बिहार में विशेष रूप से क्षारीय मृदाओं के सुधार में प्रयुक्त हो रहा है।

प्रस्तुत शोधकार्य के लिए कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में पाइराइट को क्षारीय मृदा के सुधारने के लिये प्रयोग किया गया है।

सारणी 1

मृदा विश्लेषण परिणाम

क्रम सं०	विवरण	मान	परीक्षण विधि
1.	पी० एच०	10.0	बेकमैन पी० एच० मीटर द्वारा
2.	विद्युत् चालकता	7×10^3 मि० मो०/से०मी	फिलिप्स कन्डक्टिविटी मीटर द्वारा
3.	जैविक कार्बन	0.17 प्रतिशत	वाक्ले तथा ब्लैक विधि
4.	उप्लब्ध फास्फेट	8.0 कि० ग्रा०/हे०	ओल्सन विधि
5.	उप्लब्ध पोटाश	62.0 कि० ग्रा०/हे०	फ्लेम फोटोमीटर द्वारा
6.	जिप्सम आवश्यकता (जि० आ०)	11.5 मी०टन/हे०	स्कूनोवर जिप्सम आवश्यकता विधि

प्रयोगात्मक

जिप्सम, पाइराइट, धान के पुआल एवं ढैंचा की हरी खाद का लवण-क्षारीय मृदा के सुधार पर प्रभाव देखने हेतु मई 1977 में शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार, इलाहाबाद में गमलों में एक प्रयोग प्रारम्भ किया गया। 6 उपचारों के प्रयोग को 3 पुनरावृत्तियों में करने के लिये 18 प्लास्टिक के गमले लिये गये। प्रत्येक गमले में 5-5 कि० ग्रा० लवण-क्षारीय मृदा ली गई जिसके रासायनिक विश्लेषण के परिणाम एवं विश्लेषण विधियाँ सारणी–1 में प्रदर्शित हैं। अन्य विवरण निम्न प्रकार हैं :

प्रजाति : धान साकेत–4 (खरीफ)
जौ अम्बर (रबी)

पुनरावृत्तियाँ—3

उपचार—6

1. नियन्त्रण-केवल निक्षालन

2. जिप्सम 50% जि० आ० + निक्षालन
3. जिप्सम 50% जि० आ० + धान का पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन
4. पाइराइट 100% जि० आ० + निक्षालन
5. पाइराइट 50% जि० आ० + निक्षालन
6. पाइराइट 50% जि० आ० + धान का पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन

उर्वरक स्तर :

(अ) नाइट्रोजन : 140 कि० ग्रा०/हे० (अमोनियम सल्फेट द्वारा)

(ब) फास्फेट : 60 कि० ग्रा०/हे०

(स) पोटाश : 60 कि० ग्रा०/हे०

(द) जिंक सल्फेट : 25 किग्रा०/हे०

जिप्सम तथा पाइराइट आवश्यकता की गणना

(i) जिप्सम आवश्यकता : (जि०आ०)

जिप्सम में उप्लब्ध गन्धक = 18.5%

जिप्सम की शुद्धता = 70%

1 मीट्रिक टन जिप्सम आवश्यकता की मृदा के लिये 50% जि० आ० के तुल्य जिप्सम की मात्रा

$$= \frac{1 \times 50 \times 100}{100 \times 70} \text{ मी० टन}$$

∴ 11.5 मीट्रिक टन जिप्सम की आवश्यकता की मृदा के लिए 50% जि० आ० के तुल्य जिप्सम

$$\text{की मात्रा} = \frac{1 \times 50 \times 100 \times 11.5}{100 \times 70}$$

$$= 8.214 \text{ मी० टन}$$

(ii) पाइराइट आवश्यकता

जिप्सम में उप्लब्ध गंधक = 18.5%
पाइराइट " " = 22%
पाइराइट की दक्षता = 75%

1 मी० टन जि० आ० की मृदा के लिए 100% जि० आ० के तुल्य पाइराइट की मात्रा

$$= \frac{1 \times 18.5 \times 100}{22 \times 75} \text{ मी० टन}$$

$$= 1.12 \text{ मी० टन}$$

11.5 मी० टन जि० आ० की मृदा के लिये 100 जि० आ० के तुल्य पाइराइट की मात्रा

$$=1.12 \times 11.5$$

$$=12.88 \text{ मी० टन}$$

11.5 मी० टन जि० आ० की मृदा के लिये 50% जि० आ० के तुल्य पाइराइट की आवश्यकता

$$=\frac{12.88}{2}$$

$$=6.44 \text{ मी० टन}$$

मई के प्रथम सप्ताह में गमलों की मिट्टी में उपचारों के अनुसार सुधारक पदार्थ मिलाये गये। पुआल को छोटा-छोटा काट कर मिट्टी में मिलाया गया। तत्पश्चात् गमलों में पानी भर कर लकड़ी से चलाया गया जिससे सुधारक पदार्थ भली भाँति मिट्टी में मिल जाएं। पाँचवे दिन हानिकारक लवणयुक्त निथरा हुआ पानी गमलों को बिना हिलाये एक छोटे बीकर की सहायता से निकाल दिया गया। घुलित लवणों को अधिक से अधिक मात्रा में मृदा से हटाने के लिये उपर्युक्त क्रिया 5 बार दोहराई गई। प्रत्येक बार पानी निकालने के दो दिन पश्चात् पुनः पानी दिया गया जिससे मृदा में वायु संचार बना रहे एवं जीवाणुनिष्क्रियता न उत्पन्न हो। गणना करके 60 कि० ग्रा०/हे० की दर से ढैंचा के बीज प्रत्येक गमले में बो दिये। 5 सप्ताह की ढैंचा की फसल को उखाड़ कर तोड़ कर उसी गमले की मृदा में दबा दिया और पानी भर दिया। पानी कम होने पर पानी बढ़ाते रहे जिससे ढैंचा के पौधे पूर्ण रूप से अपघटित हो जायँ। फिर लगभग 2 से०मी० व्यास की एक गोल डंडी से गमलों के किनारे के पास उनकी तली तक गड्ढा करके 1.5 से० मी० व्यास के तथा गमले की ऊँचाई से 15 से० मी० बड़े प्लास्टिक ट्यूब के टुकड़े प्रत्येक गमले में इस प्रकार लगाये कि उनके निचले सिरे गमले की तली तक पहुँच जायँ। ढैंचा की अपघटन क्रिया पूरी होने के पश्चात् 15 जुलाई को नाइट्रोजन (140 कि० ग्रा०/हे०), फास्फेट (60 कि० ग्रा०/हे०), पोटाश (60 कि० ग्रा० हे०) तथा जिंक सल्फेट (25 कि० ग्रा०/हे०) प्रत्येक गमले में मिलाया और उचित मात्रा में पानी डाल कर तथा लकड़ी चला कर मृदा को पौध रोपने योग्य बना लिया। तत्पश्चात् 25 दिन अवधि की साकेत–4 धान की पौध के 5 थान प्रति गमला लगाये गये। प्रत्येक थान में 3 पौधे प्रयोग किये। दूसरे दिन सब गमलों में पानी लगा दिया गया। वर्षा न होने के दिनों में प्रत्येक तीसरे दिन सिंचाई इस प्रकार से की गई कि एक बार गमलों में पानी दिया गया तथा दूसरी बार प्लास्टिक ट्यूब में कीप लगा कर धीरे-धीरे पानी डाला गया जिससे मृदा में पानी एक बार ऊपर से नीचे की ओर तथा दूसरी बार नीचे से ऊपर की ओर प्रवाहित हो एवं लवणों का एकत्रीकरण निक्षालन द्वारा न हो तथा वितरण समान रहे। साथ ही पौधों की जड़ों को लवण-एकत्रीकरण से हानि न पहुँचे। (खेत में सिंचाई करने पर लवण एकत्रित होने की सम्भावना कम रहती है क्योंकि निक्षालन द्वारा लवण 6 इंच से काफी नीचे पहुँच जाते हैं।) रबी में इन्हीं गमलों में जिंक सल्फेट के अतिरिक्त अन्य उर्वरक उपर्युक्त दर से ही देकर 100 कि० ग्रा०/हे० की दर से अम्बर जौ बोया गया। इस बार मृदा सुधारक पुनः प्रयोग नहीं किये गये। खरीफ में पुनः ढैंचा बोकर 5 सप्ताह की फसल मृदा में मिला दी गई तथा पानी भर कर अपघटित होने दी गई। तत्पश्चात् धान की रोपाई पूर्ववत की गई। इस प्रकार धान तथा जौ की फसलें 2 वर्ष तक

ली गईं एवं मृदा सुधारक पदार्थों के अवशिष्ट प्रभाव का उपज पर अध्ययन किया गया। सारणी 2 में खरीफ एवं रबी की 2 वर्ष की उपजें, दूसरे वर्ष की उपज के मूल्य तथा मृदा सुधारकों पर हुये व्यय के तुलनात्मक आँकड़े दिये गये हैं। प्रथम वर्ष में मृदा पर सुधारकों का प्रभाव पूर्ण रूप से न हो सकने के कारण उपज का मूल्य नहीं दिया गया है।

परिणाम तथा विवेचन

सारणी 2 आँकड़ों से स्पष्ट है कि नियन्त्रण की अपेक्षा सभी उपचारों का उपज पर अच्छा प्रभाव रहा। सबसे अधिक उपज पाइराइट 100% जि० आ० + निक्षालन उपचार ने दी। जिन उपचारों में धान पुआल का प्रयोग किया गया था उनमें पहली फसल में धान के पुआल रहित संगत उपचार की तुलना में कम उपज हुई परन्तु अगली फसल तथा इसके पश्चात् की फसलों में पुआल सहित उपचारों की उपज पुआल रहित संगत उपचारों की अपेक्षा अधिक रही। ऐसा सम्भवत: पहली फसल में पुआल का पूर्णरूप से अपघटित न हो पाना तथा अपघटित होने के लिए सुधारक पदार्थों एवं मृदा विनिमय की अभिक्रियाओं से उत्पन्न अम्लों एवं ऊर्जा का स्वयं प्रयोग करना हो सकता है।

यद्यपि पहली फसल के पश्चात् उपज के अन्तर सार्थक नहीं हैं तथापि पुआल सहित सभी उपचारों द्वारा दी गई उपज पुआल सहित संगत उपचारों द्वारा दी गई उपज की अपेक्षा पुनः अधिक रही। रबी 1977-78 में अम्बर जौ के साथ यही प्रयोग किया गया। नियन्त्रण से कुछ भी उपज नहीं प्राप्त हुई। कई गमलों की उपज बहुत कम होने के कारण सांख्यिकीय विश्लेषण नहीं किया गया। पाइराइट 100% जि० आ० + निक्षालन द्वारा दी गई उपज आंकिक रूप से सबसे अधिक थी परन्तु पाइराइट 50% जि० आ० + निक्षालन तथा पाइराइट 50% जि० आ० + पुआल + निक्षालन के लगभग बराबर रही परन्तु पाइराइट 50% जि० आ० + पुआल + निक्षालन उपचार ने खरीफ 1978-79 में धान साकेत–4 तथा रबी 1978-79 में अम्बर जौ की सर्वाधिक उपज दी। दो वर्ष के लगातार परीक्षणों से निष्कर्ष निकलता है कि 20 मी० टन/हे० धान के पुआल के साथ पाइराइट 50% जि० आ० के बराबर प्रयोग करके लवण-क्षारीय मृदा का सुधार किया जा सकता है एवं यह उपचार अन्य उपचारों की तुलना में सस्ता भी है (सारणी 2)। पाइराइट द्वारा उत्पन्न गन्धकाम्ल तथा फेरस सल्फेट आदि पुआल को अपघटित करके उसका जीवांश पदार्थ मृदा को उपलब्ध करा देते हैं तथा इसके अतिरिक्त मृदा के विन्यास, वायु संचार, जल धारण शक्ति तथा जीवाणु सक्रियता आदि में भी वृद्धि होती है और लवण-क्षारीय मृदाएं उपजाऊ मृदाओं में बदल जाती हैं जिसकी पुष्टि बलराम सिंह, प्यारे लाल त्यागी, राम अक्षयवर मिश्र तथा रमाकांत[15] ने भी की है।

सारणी 3 में धान की प्रथम तथा द्वितीय फसल के उपरान्त मृदा के पी० एच० मान, विद्युत् चालकता, सोडियम अधिशोषण अनुपात (S. A. R.) तथा उर्वरता स्तर (N, P, K) में परिवर्तन के तुलनात्मक आँकड़े प्रदर्शित हैं। पाइराइट 50% जि० आ० + धान के पुआल + निक्षालन उपचार द्वारा मृदा की पी० एच०, विद्युत् चालकता, तथा सोडियम अधिशोषण अनुपात (S. A. R.) के मानों में सबसे अधिक गिरावट आई जबकि जैविक कार्बन तथा फास्फेट के मानों में वृद्धि हुई। पोटाश के मानों पर किसी भी उपचार का विशेष प्रभाव नहीं पड़ा। यद्यपि दूसरी फसल के बाद मृदा विश्लेषण के परिणाम भी यही

सारणी 2

धान (दाने) की उपज (कुन्टल/हेक्टेयर)

क्रम सं०	उपचार	फसल खरीफ 1977-78	फसल खरीफ 1978-79	खरीफ 1978-79 की उपज का मूल्य/हे० (रुपये)	फसल रबी 1977-78	फसल रबी 1978-79	रबी 1978-79 की उपज का मूल्य/हे० (रुपये)	प्रति हेक्टेयर मृदा सुधारकों की आवश्यकता (मी० टन)	प्रति हेक्टेयर मृदा सुधारकों की लागत (रुपये)
1.	नियन्त्रण–केवल निक्षालन	4.80	27.71	4710.70		4.05	635.85		
2.	जिप्सम 50% जि० आ० + निक्षालन	10.06	30.10	5117.00	3.72	8.43	1323.51	8.214	1994.36
3.	जिप्सम 50% जि० आ० + धान का पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन	8.04	30.92	5256.40	3.96	8.72	1367.04	8.214 +20मी०टन पुआल	2594.36
4.	पाइराइट 100% जि० आ० + निक्षालन	11.07	29.86	5076.20	5.32	9.78	1535.46	12.808	3778.36
5.	पाइराइट 50% जि० आ० + निक्षालन	7.28	29.20	4964.00	4.95	8.25	1295.25	6.404	1889.18
6.	पाइराइट 50% जि० आ० + धान का पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन	6.98	31.34	5327.80	4.88	10.46	1632.22	6.404 +20मी०टन पुआल	2489·18
	क्रान्तिक अन्तर 5% स्तर पर	1.36	सार्थक नहीं						
	विचलन गुणांक	45.7%	2.8%						

टिप्पणी : जिप्सम, पाइराइट, पुआल, धान तथा जौ के मूल्यों की गणना निम्नलिखित दर पर की गई है।
जिप्सम—रु० 242.80/मी० टन, पाइराइट—रु० 300.00/मी० टन, पुआल—रु० 30/मी० टन, धान (साकेत–4)—रु० 170.00/कुन्टल, जौ—रु० 157.00/कुन्टल

सारणी 3

सुधारकों के प्रयोगोपरान्त मृदा विश्लेषण

क्रम सं०	उपचार	पी० एच० मान		विद्युत् चालकता		सोडियम अधिशोषण अनुपात (S.A.R.)		कार्बन		उपलब्ध फास्फेट कि०ग्रा०/हे०		उपलब्ध पोटाश किग्रा०/हे०	
		(अ)	(ब)	(अ)	(ब)	(अ)	(ब)	(अ)	(ब)	(अ)	(ब)	(अ)	(ब)
1.	नियन्त्रण-केवल निक्षालन	9.5	9.2	6.0	5.8	40.5	35.9	0.18	0.20	8.6	9.0	60	58
2.	जिप्सम 50% जि० आ० + निक्षालन	8.8	8.6	5.5	5.2	22.4	20.2	0.18	0.23	10.2	11.3	60	62
3.	जिप्सम 50% जि० आ० + पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन	8.8	8.5	5.3	5.0	16.2	15.0	0.20	0.29	11.9	12.9	64	59
4.	पाइराइट 100% जि० आ० + निक्षालन	8.7	8.5	5.0	5.0	15.0	14.8	0.18	0.32	10.5	11.6	62	59
5.	पाइराइट 50% जि० आ० + निक्षालन	8.7	8.6	5.0	5.0	15.2	15.0	0.18	0.32	10.0	11.9	60	60
6.	पाइराइट 50% जि० आ० + पुआल 20 मी० टन/हे० + निक्षालन	8.6	8.4	4.8	4.5	14.5	14.0	0.23	0.32	12.1	13.3	64	64

अ : प्रथम फसल के बाद ब : द्वितीय फसल के बाद

प्रवृत्ति प्रदर्शित करते हैं परन्तु पहली फसल के बाद तथा दूसरी फसल के उपरान्त मृदा विश्लेषण के परिणामों में विशेष अन्तर नहीं पाया गया। सोडियम अधिशोषण अनुपात (S. A. R.) में केवल निक्षालन (उपचार–1) से कोई गिरावट नहीं आई जो इंगित करता है कि केवल निक्षालन लवण-क्षारीय मृदा के उद्धार हेतु यथेष्ट नहीं है। उपर्युक्त परिणाम पाइराइट 50% जि० आ० + धान के पुआल + निक्षालन उपचार की श्रेष्ठता के द्योतक हैं।

निर्देश

1. गेड्राइज, के० के०, Zhur. Opyter. Agrow. (Jour. and Expt. Landan) 1917, 118. 122-140.
2. हिल्गार्ड, ई० डब्ल्यू०, Soils : Their formation, properties and relation to climate and plant growth, 1906. 593 pp.
3. केले, डब्ल्यू० पी०. Alkali Soils, Their formation, properties and reclamation. 1951, 176 pp.
4. सिग्मांड, ए० जे० डि, Soil Science, 1924, 18, 379-91.
5. हिसिंक, डी० जे०, Int. Soc. Soil. Sci. 2nd Com. (Copenhangen), 1933- part-A. 185-89.
6. धर, एन० आर० तथा मुखर्जी, एस० के०, **प्रोसी नेशनल एके० साइंस** 1936, **6**, 296-303.
7. शर्मा, देवेन्द्र प्रसाद, **डी० फिल थीसिस,** इलाहाबाद, वि०वि० 1967.
8. एब्राल, आई० पी० तथा डर्गन, के० एस०, **इण्डि० फार्मिंग**, जुलाई 1974
9. डर्गन, के० एल० तथा अन्य, **इण्डि० फार्मिंग,** मई, 1973.
10. एब्राल, आई० पी०, गोल, वी० एल० तथा आचार्य, सी० एल०, **इण्डि० फार्मिंग**, जुलाई, 1975
11. मेहता, के० तथा एब्राल, आई० पी०, **इण्डि० फार्मिंग**, अप्रैल, 1975
12. रिचार्डस, एल० ए० Diagnosis and Improvement of Saline and Alkali Soils, U. S. D. A. Hand Book. No. 60 (1968)

13.14. पार्टिंगटन, जे० आर०, A Text Book of Inorganic Chemistry, 1946, p. 977 493

15. सिंह, बलराम; त्यागी, प्यारे लाल; मिश्र, राम अक्षयवर तथा रमाकान्त, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1977, **20**, 349.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 355-362

दो वृत्तों से परिबद्ध चैनेल में से ताप वितरण

आर० सी० त्रिपाठी तथा एस० एन० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—फरवरी 14, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक चैनेल में से जो दो वृत्तों $r=a$ तथा $r=b$ से परिबद्ध है, जब असंपीड्य तरल प्रवाहित होता रहे तो ताप तथा वेग के वितरण प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

On the temperature distribution through a channel bounded by two circles. *By* R.C. Tripathi and S.N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper the temperature and velocity distributions in a channel bounded by two circles $r=a$ and $r=b$ $(b>a)$ have been obtained when viscous incompressible fluid is flowing through it. In section 1, the expression for the velocity distribution has been deduced in the presence of some external force. In section 2, this expression is used in the energy equation to find the expression for the temperature distribution. In section 3, the oscillatory flow has been discussed. In section 4, the solution for temperature distribution is obtained under external rate of heat addition.

वृत्ताकार नली में ताप वितरणों की विवेचना कई लेखकों ने, यथा ग्रेट्ज, नुसेल्ट, गोल्डस्टीन ने की है।[3] ईगल तथा फर्गुसन[2] ने ताप वितरण के लिए वृत्तीय कांस्य नली को प्रत्यावर्ती धारा से गरम करने तथा उसमें से होकर श्यान असंपीड्य तरल प्रवाहित होने की दशा के लिए व्यंजक प्राप्त किया है। इसी प्रकार लाल[5] ने भी दो एक-अक्षीय वृत्ताकार पाइपों से परिबद्ध चैनेल के लिए ताप वितरण का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम एक चैनेल में जिसका अक्ष z-अक्ष की दिशा में है ताप तथा वेग वितरणों पर विचार करेंगे। यह प्रपत्र 4 अनुभागों में विभाजित है। अनुभाग 1 में कतिपय वाह्य बल की उपस्थिति में चैनेल में श्यान स्तरीय असंपीड्य तरल प्रवाह के वेग वितरण के लिए व्यंजक दिया गया है। अनुभाग 2 में

ताप विभाजन के लिए व्यंजक प्राप्त किया गया है। अनुभाग 3 में दोलायमान प्रवाह की विवेचना की गई है। अनुभाग 4 में ताप वितरण के लिए हल दिये गये हैं जब उष्मा संयोजन की वाह्य दर $\partial Q/\partial t = Ke^{i\omega t}$ के रूप में हो।

1. माना कि चैनेल की अक्ष z-अक्ष है और इसमें से होकर श्यान असंपीड्य तरल प्रवाहित हो रहा है। स्थिर दशा गति में हमें ज्ञात है कि $q_r = 0 = q_\theta$ $q_z = f(r)$। गति का समीकरण [1, eqn. 3.17] है:

$$\rho \frac{Dq_z}{Dt} = Z_0 - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 q_z. \tag{1.1}$$

प्रस्तुत दशा में

$$\mu \left[\frac{d^2 q_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq_z}{dr}\right] = \frac{\partial p}{\partial z} - Z_0. \tag{1.2}$$

स्थिर दाब प्रवण $\partial p/\partial z$ को $-P$ तथा वाह्य शक्ति Z_0 को λr^n के रूप में लेने पर

$$\frac{d^2 q_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq_z}{dr} = -\frac{P}{\mu} - \frac{\lambda r^n}{\mu}. \tag{1.3}$$

(1.3) को समाकलित करने पर

$$r\frac{dq_z}{dr} = -\frac{Pr^2}{2\mu} - \frac{\lambda r^{n+2}}{\mu(n+2)} + C \tag{1.4}$$

जहाँ C समाकल का अचर है। किन्तु चैनेल की अक्ष की दिशा में वेग प्रवण सान्त है अतः $C=0$.

(1.4) को पुनः समाकलित करने पर

$$q_z = -\frac{Pr^2}{4\mu} - \frac{\lambda r^{n+2}}{\mu(n+2)^2} + D, \tag{1.5}$$

जहाँ D समाकलन का अचर है।

माना $r=a$ चैनेल की आन्तरिक परिसीमा है और $r=b$ वाह्य परिसीमा। परिसीमा प्रतिबन्धों को निम्न प्रकार मानने पर

$$q_z = q_{z_1}, \text{ जब } r=a \tag{1.6}$$

तथा

$$q_z = 0 \text{ जब } r=b \tag{1.7}$$

(1.5) में अचर D परिसीमित है। इस प्रकार

$$q_z = \frac{q_{z_1}\left\{\frac{P}{4\mu}(r^2-b^2) + \frac{\lambda}{\mu}\frac{(r^{n+2}-b^{n+2})}{(n+2)^2}\right\}}{\frac{P}{4\mu}(a^2-b^2) + \frac{\lambda}{\mu}\frac{(a^{n+2}-b^{n+2})}{(n+2)^2}} \tag{1.8}$$

समीकरण (1.8) बाह्य शक्ति की उपस्थिति में वेग वितरण बताता है। जब $n=0$ तो $q_z>0$ और वेग वितरण बाह्य शक्ति की अनुपस्थिति में होता है।

2. ऊर्जा समीकरण (1; eqn. 3.38) निम्न प्रकार समानीत होता है।

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=-\frac{1}{k}\phi_c, \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\phi_c=\mu\left[\frac{dq_z}{dr}\right]^2 \tag{2.2}$$

समीकरण (1.4) में से समीकरण (2.1) में प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=-\frac{1}{k}\left[\frac{P^2r^2}{4\mu}+\frac{\lambda^2r^{2n+2}}{\mu(n+2)^2}+\frac{\lambda P}{\mu}\frac{r^{2+n}}{n+2}\right] \tag{2.3}$$

(2.3) के समाकलन से

$$T=-\frac{P^2r^4}{64\mu k}-\frac{\lambda^2r^{2n+4}}{4\mu k(n+2)(2n+4)^2}-\frac{\lambda Pr^{n+4}}{(n+2)(n+4)^2\mu k}+C\log r+D, \tag{2.4}$$

जहाँ C तथा D समाकलन के अचर हैं और परिसीमा प्रतिबन्धों द्वारा निर्धारित किये जाते हैं।

परिसीमा प्रतिबन्धों को निम्न प्रकार कल्पित करने पर

तथा

$$\left.\begin{aligned} r=a,\ T=T_1 \\ r=b,\ T=T_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

(2.4) में अचर C तथा D परिसीमित हैं।

इस प्रकार

$$T=\frac{T_2\log(r/a)+T_1\log(b/r)+Q_1\log(b/a)-Q_2\log(r/a)}{\log(b/a)} \tag{2.6}$$

जहाँ

$$Q_1=\frac{P^2(a^4-r^4)}{64\mu k}+\frac{\lambda^2(a^{2n+4}-r^{2n+4})}{4\mu k(n+2)^2(2n+4)^2}+\frac{\lambda P(a^{n+4}-r^{n+4})}{\mu k(n+2)(n+4)^2} \tag{2.7}$$

तथा

$$Q_2=\frac{P^2(a^4-b^4)}{64\mu k}+\frac{\lambda^2(a^{2n+4}-b^{2n+4})}{4\mu k(n+2)^2(2n+4)^2}+\frac{\lambda P(a^{n+4}-b^{n+4})}{\mu k(n+2)(n+4)^2} \tag{2.8}$$

अध्ययन किये जा रहे चैनेल में ताप वितरण का व्यंजक समीकरण (2.6) है।

3. माना कि चैनेल में प्रवाह अस्थिर एवं लघु दोलनों सहित दोलायमान है तो वेग वितरण [1; eqn. 12.56] इस प्रकार होगा

$$q_{z_1}=\frac{K}{4\nu}(a^2-r^2)\cos\omega t \tag{3.1}$$

और तब ऊर्जा समीकरण निम्नवत् हो जाता है

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{K^2\rho^2r^2\cos^2\omega t}{4/\nu} \tag{3.2}$$

समीकरण (3.2) को निम्नलिखित रूप में रखते हैं

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k'\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+r^2k''(1+\cos 2\omega t) \tag{3.3}$$

जहाँ $$k'=\frac{k}{\rho c_v}$$

तथा $$k''=\frac{K^2}{8\nu c_v} \tag{3.4}$$

(3.3) के लिए माना कि

$$T=f(r)[1+\cos 2\omega t] \tag{3.5}$$

अब $\partial T/\partial t$ शून्य हो जाता है क्योंकि ω अत्यन्त लघु है (जिससे पदों के वर्ग तथा ω के उच्चतर घातों की उपेक्षा की जा सकती है)

समीकरण (3.3) तथा (3.5) से

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{k''}{k'}r^2=0 \tag{3.6}$$

समीकरण (3.6) से

$$f=-\frac{r^4}{16}\frac{k''}{k'}+A_1\log r+B_1. \tag{3.7}$$

प्राप्त होता है। चूँकि अक्ष पर $t>0$ के लिए ताप सान्त है, अतः $A_1=0$.

इस प्रकार

$$f=-\frac{r^4}{16}\frac{k''}{k'}+B_1 \tag{3.8}$$

परिसीमा पतिबन्धों को निम्नवत मानने पर

$$\left.\begin{aligned} &T=T_1=f_1(1+\cos 2\omega t) \quad r=a \text{ पर} \\ \text{तथा} \quad &T=T_2=f_2(1+\cos 2\omega t) \quad r=b \text{ पर} \end{aligned}\right\} t>0 \text{ के लिए} \tag{3.9}$$

फलस्वरूप हमें निम्न फल प्राप्त होंगे

$$\left.\begin{aligned} &f=f_1 \quad r=a \text{ पर} \\ \text{तथा} \quad &f=f_2 \quad r=b \text{ पर} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से (3.8) में अचर B_1 परिमित है। इस प्रकार

$$f=\frac{f_1(r^4-b^4)+f_2(a^4-r^4)}{a^4-b^4} \tag{3.11}$$

तो हमें (3.12) प्राप्त होगा

$$T=\left[\frac{f_1(r^4-b^4)+f_2(a^4-r^4)}{a^4-b^4}\right](1+\cos 2\omega t) \tag{3.12}$$

जब ω अत्यन्त लघु हो, जिससे कि वर्ग तथा ω के उच्चतर घातांकों वाले पदों की उपेक्षा की जा सके, तो (3.2) का हल समीकरण (3.12) है, (3.12) में $r/a=n_1$ एवं $b/a=n$ रखने एवं $f_1=f_2=1$, मानने पर

$$T=(1+\cos 2\omega t) \tag{3.13}$$

यह देखा जा सकता है कि $2\omega t$ घटने के साथ T बढ़ता है और उच्चतम मान तब मिलता है जब $2\omega t=0$.

यह कल्पना करने पर कि दाब प्रवण लघु है या कि द्रव हल्का हो जिससे $K^2 \simeq 0$ या $\rho^2 \simeq 0$ अथवा K तथा ρ दोनों ही लघु मात्रायें हों। समीकरण (3.2)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k'\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{3.14}$$

में समानीत हो जाता है। (3.14) का हल इस प्रकार है

$$T=\frac{A}{t}e^{-r^2/4k't}+B, \tag{3.15}$$

जहाँ A तथा B अचरों को परिसीमा प्रतिबन्धों से ज्ञात किया जाता है।

माना कि परिसीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं

$$T = T_1 \text{ जब } r = a \tag{3.16}$$

तथा

$$T = T_2 \text{ जब } r = b. \tag{3.17}$$

उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से (3.15) में अचर A को निर्धारित किया जाता है। इस प्रकार

$$T = T_1 + \frac{T_2[e^{-a^2/4k't} - e^{-r^2/4k't}] + T_1[e^{-r^2/4k't} - e^{-a^2/4k't}]}{e^{-a^2/4k't} - e^{-b^2/4k't}} \tag{3.18}$$

समीकरण (3.18) ताप वितरण का व्यंजक है जब दाब प्रवण अत्यन्त लघु हो तथा द्रव (तरल) अत्यन्त हलका हो।

4. माना उष्मा योजन की दर

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0 \text{ तथा } \frac{\partial Q}{\partial t} = Ke^{i\omega t} \tag{4.1}$$

जब गति दोलायमान हो और दाब प्रवण लघु हो तो ऊर्जा समीकरण का रूप (4.1) के अन्तर्गत कल्पना के अन्तर्गत

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{4.2}$$

होगा।

समीकरण (4.2)को हल करने के लिए, माना कि

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= Ke^{i\omega t} \\ \text{तथा} \quad T(r, t) &= f(r)e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

फलतः समीकरण (4.2) निम्न में समानीत हो जाता है

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{\rho c_v i\omega}{k} f = -\frac{K}{k}. \tag{4.4}$$

(4.4) के लिए माना कि

$$F = \frac{K}{k} - \frac{\rho c_v i\omega}{k} f. \tag{4.5}$$

तो

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{\rho c_v i\omega}{k} F = 0 \tag{4.6}$$

समीकरण (4.6) का हल इस प्रकार होगा[4] :

$$F = D'_n J_0(rpi^{3/2}) + E'_n Y_0(rpi^{3/2}) \tag{4.7}$$

जहाँ $p=\sqrt{\left(\frac{\omega\rho c_v}{k}\right)}$, J_0 तथा Y_0 बेसिल फलनों के क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय शून्य कोटिक हैं। अतः

$$T(r, t)=\left[-\frac{iK}{\rho c_v\omega}+D_n J_0(rpi^{3/2})+E_n Y_0(rpi^{3/2})\right] e^{i\omega t} \tag{4.8}$$

दोलायमान प्रवाह को अध्यारोपित करने के पूर्व पूर्ण विकसित स्थिर स्तरीय गति होनी चाहिए। इस प्रतिबन्ध के साथ तथा निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबन्धों को प्रयुक्त करने पर

$$T=T_1=f_1 e^{i\omega t} \quad \text{जब} \quad r=a \tag{4.9}$$

तथा

$$T=T_2=f_2 e^{i\omega t} \quad \text{जब} \quad r=b \tag{4.10}$$

फलस्वरूप

$$f=f_1 \quad \text{जब} \quad r=a \tag{4.11}$$

तथा

$$f=f_2 \quad \text{जब} \quad r=b \tag{4.12}$$

(4.8) में D_n तथा E_n अचरों को उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार

$$T=R\left(-\frac{iK}{\rho c_v\omega}\right)\left[1-\frac{\{(Y_0(bpi^{3/2})-Y_0(api^{3/2})\}J_0(rpi^{3/2})-\{J_0(bpi^{3/2})-J_0(api^{3/2})\}Y_0}{J_0(api^{3/2})Y_0(bpi^{3/2})-J_0(bpi^{3/2})Y_0(api^{3/2})}\right] e^{i\omega t}$$

$$+\frac{R[\{T_1 Y_0(bpi^{3/2})-T_2 Y_0(api^{3/2})\}J_0(rpi^{3/2})-\{T_1 J_0(bpi^{3/2})-T_2 J_0(api^{3/2})\}Y_0]}{J_0(api^{3/2})Y_0(bpi^{3/2})-J_0(bpi^{3/2})Y_0(api^{3/2})} e^{i\omega t} \tag{4.10}$$

जहाँ R वास्तविक अंश के लिए आया है।

समीकरण (4.13) अध्ययनान्तर्गत चैनेल में ताप वितरण का व्यंजक है।
$T_1=T_2$ मानने पर ज्यों-ज्यों $a\to 0$

$$T=R\left[-\frac{iK}{\rho c_v\omega}\left\{1-\frac{J_0(rpi^{3/2})}{J_0(bpi^{3/2})}\right\}\right] e^{i\omega t}+R\frac{[T_1 J_0(rpi^{3/2})e^{i\omega t}]}{J_0(bpi^{3/2})} \tag{4.14}$$

समीकरण (4.14) वृत्ताकार पाइप के लिए ताप वितरण है।

जब घनत्व, दोलन तथा C_v लघु होते हैं तो समीकरण (4.4) से

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}=-\frac{K}{k} \tag{4.15}$$

प्राप्त होता है। (4.15) को समाकलित करने पर

$$f = -\frac{Kr^2}{4k} + A_2 \log r + B_2. \tag{4.16}$$

समीकरण (4.16) सन्निकटतः (4.4) का हल है।

माना कि परिसीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार है

$$\left.\begin{aligned} f &= f_1 \quad \text{जब} \quad r = a \\ \text{तथा} \quad f &= f_2 \quad \text{जब} \quad r = b \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

(4.16) में उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से A_2 तथा B_2 अचरों को निर्धारित करने पर

$$f = \frac{4kf_1 \log (r/b) - 4kf_2 \log(r/a) + K(a^2 - r^2) \log(a/b) - K(b^2 - a^2) \log(r/a)}{4k \log (a/b)} \tag{4.18}$$

इस प्रकार

$$T(r, t) = f(r)e^{i\omega t}$$

$$= \frac{[4kf_1 \log (r/b) - 4kf_2 \log (r/a) + K(a^2 - r^2) \log (a/b) - K(b^2 - a^2) \log (r/a)]\, e^{i\omega t}}{4k \log (a/b)} \tag{4.19}$$

(4.19) में वास्तविक अंश को लेने पर

$$T = \frac{[4kf_1 \log (r/b) - 4kf_2 \log (r/a) + K(a^2 - r^2) \log (a/b) - K(b^2 - a^2) \log (r/a)] \cos \omega t}{4k \log (a/b)} \tag{4.20}$$

(4.20) में $r/a = n_1$ तथा $b/a = n$ रखने पर

$$T = \frac{\cos \omega t}{4k \log n} [4kf_1 \log n + 4k(f_2 - f_1) \log n_1 + Ka^2(1 - n_1^2) \log n + Ka^2(n^2 - 1) \log n] \tag{4.21}$$

जिसका उपयोग आरेखीय निरूपणों के लिए किया जाता है।

निर्देश

1. पाई, एस०, Viscous Flow Theory I. 1956
2. ईगल, ए० तथा फर्गुसन आर०एम०, **प्रोसी० रायल सोसा०** 1930, A**127**, 540-566
3. गोल्डस्टाइन, एस०, Modern Development in Fluid Dynamics, भाग II, आक्सफोर्ड, 1908; पृष्ठ 613-623
4. वाट्सन, जी०एन०, Theory of Bessel Functions, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1922
5. लाल, के०, **प्रोसी० फिला० सोसा० मैथ० फिजि०** सेक्स०, 1964, **60**, 653-656

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 363-368

फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी की (F, d_n) संकलनीयता

वेद प्रकाश

गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जनवरी 17, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी की $[F, d_n]$ संकलनीयता के लिए उत्तम निकष ज्ञात करना है।

Abstract

On $|F, d_n|$ summability of conjugate series of a Fourier series. *By* Ved Prakash, Department of Mathematics, University of Saugar, Sagar.

The object of this paper is to find a good criterion for $[F, d_n]$ summability of conjugate series of a Fourier series.

1. माना $f(x)\epsilon L[0, 2\pi]$ तथा इस परास के बाहर आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। इस फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी को

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \tag{1.1}$$

द्वारा व्यक्त करते हैं। सार्विकता की क्षति के विना यह कल्पना की जा सकती है कि

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

$f(x)$ की फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी को

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x). \tag{1.2}$$

द्वारा दिया जाता है। सदैव की भाँति, हम लिखेंगे कि

$$\psi(t)=\{f(x+t)-f(x-t)\}.$$

परिभाषा

माना कि $d_1, d_2; \ldots, d_n, \ldots$ धन संख्याओं का स्थिर अनुक्रम है। माना कि $\sum_{n=0}^{\infty} C_m$ दी हुई श्रेणी है और $s_n=\sum_{m=0}^{\infty} C_m$ । यह श्रेणी $[F, d_n]$ संकलनीय कही जाती है यदि $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} \; s_k$ ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ त्यों त्यों यह सीमा s को अग्रसर होती है जहाँ P_{nk} अचरों को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{x+d_j}{1+d_j} \equiv \sum_{k=0}^{r} P_{nk}\, x^k \text{ तथा } P_{00}=1. \tag{1.3}$$

$[F, d_n]$ संकलनीयता की विवेचना की जा चुकी है।[4,6,7]

यह ज्ञात है कि विधि $[F, d_n]$ नियमित है यदि और केवल यदि

$$\sum_k \frac{1}{1+d_k}=\infty. \tag{1.4}$$

हम लिखेंगे

$$S_n \equiv 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{(1+d_k)^2} \tag{1.5}$$

तथा

$$U_n \equiv 1+2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+d_k)}\,. \tag{1.6}$$

लार्च तथा न्युमैन[6] ने सिद्ध किया है कि यदि S_n परिबद्ध है तो $[F, d_n]$ विधि से केवल अभिसारी फूरियर श्रेणी का ही योगफल निकलता है।

हालैंड, साहनी तथा जिम्बलारियो[3] ने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है।

प्रमेय II. यदि

$$\int_0^t |\,\phi(u)\,|\, du=0(t),\; t\to 0^+, \tag{1.7}$$

तथा

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2\pi/U_n}^{\eta} \frac{|\,\phi(t)-\phi(t+2\pi/U_n)\,|}{t} \exp\left(-\frac{S_n\,.\,t^2}{4}\right) dt=0 \tag{1.8}$$

जहाँ η एक अचर है और S_n तथा $U_n \to \infty$, तब f की फूरियर श्रेणी x बिन्दु पर (F, d_n) S तक संकलनीय है।

इस प्रमेय की विशिष्ट दशा ज्ञात है जब [2] $d_n=1; n=1, 2, \ldots$। यही नहीं, जब $d_n=c^{-1}(n-1)$, $n=1, 2, \ldots$, तथा C धन पूर्णाङ्क हो तो वह दशा कैयल[5] द्वारा विवेचित की जा चुकी है।

2. प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी की $[F, d_n]$ संकलनीयता के लिए उत्तम निकष ज्ञात करना है। हमारा प्रमुख परिणाम निम्नलिखित प्रमेय है।

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |\psi(t)|\, dt = 0(t),\ t \to 0^+, \tag{2.1}$$

संयुग्मी समाकल का अस्तित्व है तथा

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2\pi/U_n}^{\eta} \frac{|\psi(t)-\psi(t+2\pi/U_n)|}{t} \exp\left(-\frac{s_n \cdot t^2}{4}\right) dt = 0 \tag{2.2}$$

जहाँ η एक अचर है तथा S_n एवं $U_n \to \infty$, तो (1.2) बिन्दु x पर $f(x)$ में $[F, d_n]$ संकलनीय है। इस प्रमेय की विशिष्ट दशा ज्ञात है [8] जब $d_n=1; n=1, 2, \ldots$

3. इस प्रमेय की उपपत्ति देने के लिए हमें लार्च तथा न्यूमान के निम्नलिखित आकलों की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका

$$\text{(i)}\quad \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(it)+d_k}{1+d_k} = 0\left\{\exp\left(-\frac{1}{16} s_n \cdot t^2\right)\right\} \tag{3.1}$$

$$\text{(ii)}\quad \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(it)+d_k}{1+d_k} = 0\left\{\exp(U_n-1)\left(\frac{it}{2}-\frac{s_n \cdot t^2}{4}\right)\right\} + 0\{S_n \cdot t^3\}. \tag{3.2}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

(1.2) के nवें आंशिक योग को निम्न प्रकार दिया जाता है[1]

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \cos nt\, dt + 0(1) \tag{4.1}$$

$t_n = \sum_{k=0}^{n} P_{nk}\, s_k$ लिखने पर

हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$t_n - f(x) + 0(1) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi(t)}{t} \sum_{k=0}^{n} P_{nk} \cdot \cos kt \, dt \tag{4.2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R \left[\sum_{k=0}^{n} P_{nk} \cdot \exp(ikt) \right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(it) + d_k}{1 + d_k} \right] dt$$

$$t_n - f(x) + 0(1) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{a(n)} + \int_{a(n)}^{b(n)} + \int_{b(n)}^{\pi} \right\} \frac{\psi(t)}{t} R \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(it) + d_k}{1 + d_k} \right\} dt \tag{4.3}$$

$= I_1 + I_2 + I_3$, माना,

जहाँ $a(n) \equiv 2\pi / U_n$ तथा $b(n) \equiv S_n^{-a}$, $1/3 < a < 1/2$.

अब

$$| I_3 | = \left| \frac{1}{\pi} \int_{b(n)}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(it) + d_k}{1 + d_k} \right\} dt \right|$$

$$\leqslant 0(1) \cdot \int_{b(n)}^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{t} \cdot 0 \left\{ \exp\left(-\frac{1}{16} S_n (b(n))^2 \right) \right\} dt$$

$$\leqslant 0(1) . 0 \left\{ \exp\left(-\frac{1}{16} S_n (b(n))^2 \right\} \right) \frac{1}{b(n)} \int_{b(n)}^{\pi} | \psi(t) | dt$$

$$= o(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.4}$$

आगे भी, हमें ज्ञात है कि

$$I_1 \leqslant o(1) \cdot \int_0^{a(n)} \frac{\psi(t)}{t} R \left[0 \left\{ \exp\left((U_n - 1) \frac{it}{2} - \frac{S_n t^2}{4} \right) \right\} + 0(S_n \cdot t^3) \right] dt$$

$$= o(1) \cdot \int_0^{a(n)} \frac{\psi(t)}{t} \left[0 \left\{ \exp\left(- \frac{S_n t^2}{4} \right) \cdot \cos \frac{(U_n - 1)t}{2} \right\} + 0(S_n \cdot t^3) \right] dt \tag{4.5}$$

अब

$$o(1) \cdot \int_0^{a(n)} \frac{\psi(t)}{t} \cdot S_n t^3 \, dt = 0 \{ (a(n))^3 \cdot S_n \cdot 0(1) \}$$

$= 0(1)$, निर्देश[3] की तरह

इस प्रकार

$$I_1 \leqslant 0(1) \,.\, \int_0^{a(n)} \frac{\psi(t)}{t}\, dt + 0(1) \tag{4.6}$$

$=0(1)+0(1)$, अभिकल्पना से

$=0(1).$

प्रमेयिका से हमें प्राप्त है कि

$$I_2=0(1) \,.\, \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\left[0\left\{\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right)\cos\frac{(U_n-1)t}{2}\right\}+0\{S_n\, t^3\}\right]dt \tag{4.7}$$

$=J+K$, माना

$$|\, K \,|=0(1) \,.\, \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{|\,\psi(t)\,|}{t} \,.\, 0(S_n\, t^3)dt$$

$$\leqslant 0\{S_n(b(n))^2\} \,.\, \int_0^{b(n)} |\, \psi(t) \,|dt$$

$$=0(1). \tag{4.8}$$

निम्नलिखित पर विचार करना है

$$\pi \,.\, J= \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\, 0\left\{\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right) . \cos\frac{(U_n-1)t}{4}\right\}dt$$

$$=0\left[\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right) . \left(\cos\frac{U_n\, t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{U_n\, t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)dt\right]$$

$$=0\left[\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right)\cos\left(\frac{U_n\, t}{2}\right) . \cos\left(\frac{t}{2}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right) . \sin\left(\frac{U_n\, t}{2}\right) . \sin\frac{t}{2}\, dt\right]$$

$$=0\left[\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right)\cos\left(\frac{U_n\, t}{2}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t}\exp\left(-\frac{S_n\, t^2}{4}\right)\sin\left(\frac{U_n\, t}{2}\right)dt\right]$$

$=J_1+J_2$, माना

अब

$J_2=0(1)$ जैसा कि निर्देश[3] में है। (4.10)

इसके आगे भी,

$$2\,J_1 \leqslant \int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)}{t} \exp\left(-\frac{S_n\,t^2}{4}\right) \cos \frac{U_n\,t}{2}\,dt$$

$$-\int_0^{a(n)-b(n)} \frac{\psi(t+a(n))}{t+a(n)} \exp\left(-\frac{S_n(t+a(n))^2}{4}\right).\cos\left(\frac{U_n\,t}{2}\right)dt$$

$$=\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t)-\psi(t+a(n))}{t} \exp\left(-\frac{S_n\,t^2}{4}\right).\cos\left(\frac{U_n\,t}{2}\right)dt$$

$$+\int_{a(n)}^{b(n)} \psi(t+a(n))\left\{\exp\left(-\frac{S_n\,t^2}{4}\right)-\exp\left(-\frac{S_n(t+a(n))^2}{4}\right)\right\}\cos\left(\frac{U_n\,t}{2}\right)dt$$

$$+\int_{a(n)}^{b(n)} \psi(t+a(n)).\exp\left(-\frac{S_n(t+a(n))^2}{4}\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+a(n)}\right).\cos\frac{U_n\,t}{2}\,dt$$

$$-\int_0^{a(n)} \frac{\psi(t+a(n))}{t+a(n)} \exp\left(-\frac{S_n(t+a(n))^2}{4}\right)\cos\left(\frac{U_n\,t}{2}\right)dt$$

$$+\int_{b(n)-a(n)}^{b(n)} \frac{\psi(t+a(n))}{t+a(n)} \exp\left(-\frac{S_n(t+a(n))^2}{4}\right)\cos\frac{U_n\,t}{2}\,dt$$

$=J_{1\cdot1}+J_{1\cdot2}+J_{1\cdot3}+J_{1\cdot4}+J_{1\cdot5}$, माना ।

अब निर्देश[3] की भाँति उपपत्ति आगे बढ़ती है । यहाँ हम उसके विस्तार नहीं दे रहे हैं ।

निर्देश

1. बैरी, एन० के०, A Treatise on Trigonometric Series, भाग II, पैर्गमान प्रेस, 1964
2. हालैण्ड, ए० एस० बी०, साहनी, बी०एन० तथा जिम्बालेरियो, जे०, Boll. Un. Mat. Ital., 1975, **12**, 315-320
3. वही, Un. Mat. Ital., 1977, **14**-A 126-130
4. जैकियोव्स्की, ए०, Michigan Math. J. 1959, **6**, 277-290
5. कैथल, पी०डी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 105-114
6. लार्च, एल० तथा न्यूमान, डी० जे०, Pure. Appl. Math. **15**, 1962, 109-118
7. मिरैक्ल, सी०एल०, Canad. J. Math., 1960, **12**, 660-673
8. सक्सेना, आर०बी०, प्रकाशनाधीन

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 369-374

सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में क्रोमियम पराक्सीडाइक्रोमेट द्वारा D-ग्लूकोस के आक्सीकरण का अणुगतिक अध्ययन

श्रीमती के० शर्मा; वी० के० शर्मा तथा आर० सी० राय
शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 6, 1980]

सारांश

तनु सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थित में D-ग्लूकोस का आक्सीकरण क्रोमियम पराक्सीडाइक्रोमेट द्वारा अध्ययन किया गया। क्रिया की कोटि ग्लूकोस, आक्सीकारक तथा H^+ के सापेक्ष 1 है। क्रिया पर उदासीन लवणों तथा डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक का प्रभाव भी देखा गया। क्रिया का अन्तिम क्रियाफल ग्लूकोनिक अम्ल प्राप्त हुआ। अभिक्रिया की क्रियाविधि प्रायोगिक तथ्यों के आधार पर प्रस्तुत की गई है।

Abstract

Kinetic study of oxidation of D-glucose by chromium peroxydichromate in sulphuric acid medium. *By* Smt. K. Shrma, V. K. Sharma and R. C. Rai, Government Science College, Rewa (M. P.).

Kinetic oxidation of glucose was studied by chromium peroxydichromate in very dilute sulphuric acid. The reaction was observed to be of first order w.r.t. glucose, oxidant and H^+. Effect of neutral salts and dielectric constant of the medium was studied on the rate of oxidation. Gluconic acid was obtained as final product. On the basis of kinetic results, suitable mechanism of the reaction is proposed.

क्रोमियम पराक्सीडाइक्रोमेट को विभिन्न यौगिकों के आक्सीकरण हेतु उपयोग किया जा रहा है[1-6]। प्रस्तुत शोध-प्रपत्र में D-ग्लूकोस का तनु सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थिति में क्रोमियम पराक्सीडाइक्रोमेट द्वारा आक्सीकरण करने की क्रिया का अणुगतिक अध्ययन किया गया है और प्रायोगिक तथ्यों के आधार पर अभिक्रिया की क्रियाविधि को प्रस्तुत किया जा रहा है।

प्रयोगात्मक

उपयोग में लाये गये सभी रासायनिक अभिकर्मक उच्च विशिष्टता वाले थे। क्रोमियम पराक्सी-डाइक्रोमेट को सिंह तथा राय[7] की विधि द्वारा बनाया गया और क्रिया का वेग ओस्टवाल्ड विलगन विधि द्वारा किया गया। क्रिया वेग का निर्धारण आक्सीकारक के विलोप को आयोडोमिति विधि द्वारा ज्ञात करके किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

(अ) **आक्सीकारक की सान्द्रता का प्रभाव :** आक्सीकारक के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि एवं आक्सीकारक के सान्द्रता का प्रभाव स्थिर ताप पर पराक्सीडाइक्रोमेट की अलग-अलग सान्द्रता एवं ग्लूकोस एवं सल्फ्यूरिक अम्ल की स्थिर सान्द्रता पर अध्ययन किया गया (सारणी–1)। अभिक्रिया की कोटि आक्सीकारक के सापेक्ष 1 प्राप्त हुई।

सारणी 1

[ग्लूकोस] $=10.00 \times 10^{-1}M$, $[H_2SO_4]=5.00\times 10^{-2}N$.
ताप $=45°C$

$[Cr_2(Cr_2O_8)_3]\times 10^2$ N	1.00	1.25	1.66	2.50
$10^3 . k_1\ min^{-1}$	6.756	6.613	6.570	6.237

स्पष्ट है कि आक्सीकारक की सान्द्रता बढ़ाने पर वेग स्थिरांक क्रमशः कम होता जाता है, जो कि सक्रिय आक्सीकारक स्पिसीज $HCrO_4^-$ को बतलाते हैं[8]।

(ब) **ग्लूकोस की सान्द्रता का प्रभाव :** ग्लूकोस की सान्द्रता बढ़ाने पर वेग स्थिरांक में बृद्धि होती है, परन्तु k_1/[ग्लूकोस] का मान स्थिर रहता है (सारणी–2)। अतः ग्लूकोस के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि 1 है।

सारणी 2

$[Cr_2(Cr_2O_9)_3]$ $=2.50\times 10^{-2}N$, $[H_2SO_4]=5.00\times 10^{-}N$
ताप $=45°C$.

[ग्लूकोस] $\times 10M$	$10^3 . k_1$ min^{-1}	$\frac{10 . k_1}{[ग्लूकोस]}$
5.00	2.526	5.052
7.50	4.285	5.713
10.00	6.239	6.239
12.50	8.068	6.454
15.00	9.738	6.492

(स) **सल्फ्यूरिक अम्ल की सान्द्रता का प्रभाव :** सल्फ्यूरिक अम्ल की सान्द्रता के परिवर्तन पर वेग स्थिरांक क्रमशः सान्द्रता के वृद्धि के साथ बढ़ता है लेकिन $k_1/[H_2SO_4]$ का मान स्थिर है (सारणी–3), जिससे स्पष्ट है कि सल्फ्यूरिक अम्ल के सापेक्ष वेग की कोटि 1 है ।

सारणी 3

$[Cr_2(Cr_2O_8)_3]=2.50\times10^{-2}N$, ताप=45°C.

[ग्लूकोस × 10M] / $[H_2SO_4]\times10^2N$	10.00		5.00	
	$\frac{10^3 . k_1}{min^{-1}}$	$\frac{10^3 . k_1}{[H_2SO_4]}$	$\frac{10^3 . k_1}{min^{-1}}$	$\frac{10^3 . k_1}{[H_2SO_4]}$
6.66	8.533	1.281	3.336	5.090
5.00	6.239	1.247	2.526	5.052
3.33	3.472	1.067	1.845	5.540
2.50	2.753	1.101	1.313	5.252

(द) **उदासीन लवणों का प्रभाव :** NaCl, KCl, Na_2SO_4 और K_2SO_4 जैसे उदासीन लवणों को निकाय में डालने से अभिक्रिया पर होने वाले प्रभाव का अध्ययन किया गया है । परिणाम सारणी–4 में दिये गये हैं ।

सारणी 4

[ग्लूकोस]=$5.00\times10^{-1}M$ $[Cr_2(Cr_2O_8)_3]=2.50\times10^{-2}N$.

$[H_2SO_4]=5.00\times10^{-2}N$ ताप =45°C.

सान्द्रता × 10^3M	NaCl	KCl	Na_2SO_4	K_2SO_4
0.00	2.526	2.526	2.526	2.526
1.00	——	——	2.455	2.387
2.50	2.518	2.505	2.424	2.320
5.00	2.509	2.501	2.373	2.224
10.00	2.488	2.478	——	——

उपर्युक्त सारणी के प्रेक्षण से स्पष्ट है कि लवण क्रिया की गति को धीमा करते हैं ।

(इ) **विलायक का प्रभाव** : अभिक्रिया को ऐसीटिक अम्ल एवं जल के अलग-अलग मिश्रणों में अध्ययन किया गया और यह देखा गया कि वेग स्थिरांक में विलयन के डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक के मान में कमी के साथ बृद्धि होती है (सारणी–5)।

सारणी 5

[ग्लूकोस] $= 500 \times 10^{-1}$M, $[Cr_2(Cr_2O_8)_3] = 2.50 \times 10^{-2}$N
$[H_2SO_4] = 5.00 \times 10^{-2}$N, ताप $= 45°$C.

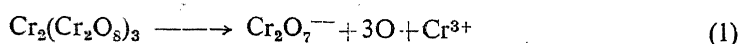
[ऐसीटिक अम्ल] % V/V	$10^3 . k_1$ min^{-1}
10	4.692
20	7.634
30	14.17
40	25.78
50	62.01

(ई) **ताप का प्रभाव** : क्रिया का 45, 50, 55 तथा 60°C पर अध्ययन किया गया। अभिक्रिया आर्हीनियस समीकरण का पूर्णतया पालन करती है। ताप गुणांक, E, A एवं $\triangle S$ के मान क्रमशः 2.013, 15.790 KCal. mole^{-1}, 2.918×10^{-5} sec^{-1} और -29.13 e. u. प्राप्त हुए।

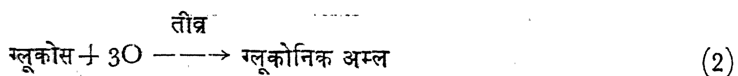
क्रिया का अन्तिम अभिक्रियाफल पेपर क्रोमेटोग्राफी विधि द्वारा ग्लूकोनिक अम्ल प्राप्त किया गया[9]।

उपर्युक्त प्रायोगिक आधार पर निम्नलिखित क्रियाविधि प्रस्तावित की जा सकती है।

क्रोमियम पराक्सीडाइक्रोमेट जलीय विलयन में अपघटित होकर आक्सीजन, डाइक्रोमेट आयन एवं Cr(III) देता है[10–12.]।



$$Cr_2(Cr_2O_8)_3 \longrightarrow Cr_2O_7^{--} + 3O + Cr^{3+} \quad (1)$$



$$\text{ग्लूकोस} + 3O \xrightarrow{\text{तीव्र}} \text{ग्लूकोनिक अम्ल} \quad (2)$$



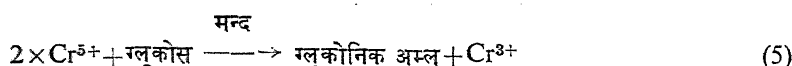
$$Cr_2O_7^{--} + H_2O \longrightarrow 2HCrO_4^-$$



$$\text{ग्लूकोस} + H^+ + HCrO_4^- \longrightarrow \text{ग्लूकोनिक अम्ल} + H_2CrO_3 \quad (3)$$



$$Cr^{6+} + Cr^{4+} \longrightarrow 2Cr^{5+} \quad (4)$$



$$2 \times Cr^{5+} + \text{ग्लूकोस} \xrightarrow{\text{मन्द}} \text{ग्लूकोनिक अम्ल} + Cr^{3+} \quad (5)$$

समीकरण (5) में अभिक्रिया का वेग $\propto[Cr^{5+}]$ [ग्लूकोस]
किन्तु $[Cr^{5+}]$ का मान प्रतिस्थापन करने
अभिक्रिया का वेग $\propto[HCrO^{-}_4]$ $[H^{+}]$ [ग्लूकोस]

उपर्युक्त अभिक्रिया का वेग एवं क्रियाविधि योजना प्रायोगिक प्राप्त जानकारी को सफलतापूर्वक प्रतिपादित करते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत कार्य में आर्थिक सहायता देने के लिए लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आभारी है।

निर्देश

1. पिल्लाइ, सी० वी० पी० तथा राय, आर० सी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1964, **41**, 217.
2. सिंह, जे० तथा राय, आर० सी०, **वही** 1965, **42**, 133.
3. राजपूत, बी० एस० तथा गर्ग, एस० एल०, **वही**, 1969, **46**, 1090.
4. शर्मा, के० सी०; राय, आर० सी० तथा राजपूत, बी० एस०, **वही** 1971, **48**, 625.
5. श्रीवास्तव, आर० पी० तथा राय, आर० सी०, **वही** 1972, **49**, 625.
6. शर्मा, वी० के० तथा राय, आर० सी०, **65वें इन्डि० साइ० कांग्रे० सारांश**, भाग 3 49.
7. सिंह, डी० तथा राय, आर० सी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1970, **47**, 239.
8. वेस्थीमर, एफ० एच०, **केमि० रिव्यूज**, 1949, **45**, 419.
9. वाचनान, जे० जो०, ड्रेकर, सी० ए० तथा लांग, ए० जी०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1950, 3162.
10. राय, आर० सी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1957, **34**, 59, 68, 193.
11. तोमर, ओ० पी०, सिंह, आर० तथा सिंह, जे०, **वही** 1973, **50**, 209.
12. कुलश्रेष्ठ, ओ० पी० तथा सिंह, डी० आर०, **वही**, 1975, **52**, 531.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981 Pages, 375-380

फलक केन्द्रित संक्रमण धातुओं में जालकीय तरंगें एवं परिवर्द्धित फीलेक प्रतिरूप

आर॰एम॰ अग्रवाल तथा आर॰पी॰एस॰ राठौर

भौतिकी विभाग, राजा बलवंत सिंह कालेज, आगरा

[प्राप्त—नवम्बर 4, 1981]

सारांश

संक्रमण-धातुओं हेतु फीलेक प्रतिरूप को (अ) आयतन-बलों (ब) आयनकोरों के मध्य एवं d-आवरणकों के मध्य पारस्परिक क्रियाओं एवं (स) जालकीय-साम्य के लिए संशोधित किया गया है। इस परिवर्तित रूप की प्रामाणिकता को निश्चित करने के लिए फलक केन्द्रित कोबाल्ट में विक्षेपण वक्रों को उत्पादित किया गया है।

Abstract

Lattice waves in FCC transition metals and modified Fielek model. *By* R.M. Agarwal and R.P.S. Rathore, Department of Physics, R.B.S. College, Agra.

Fielek Model for transition metals is corrected for (a) volume interactions, (b) core-core and d shell-d shell interactions and (c) lattice stability. This modified form is tested for its validity by reproducing the dispersion relations in face centered cobalt.

जालकी गतिकी सम्बन्धी फीलेक[1] प्रतिरूप स्पष्टतः संक्रमण धातुओं के विभिन्न अवयवों के बीच पारस्परिक क्रियाओं को वस्तु-परक ढंग से व्यक्त करता है। इस प्रतिरूप को शोध-साहित्य[2–6] में प्रमुख स्थान प्राप्त है। इस सबके बावजूद इस प्रतिरूप में निम्नलिखित तथ्यों की उपेक्षा की गई प्रतीत होती है।

(अ) आयन कोरों एवं चालन इलेक्ट्रानों के मध्य प्रभावी आयतन-बलों को फीलेक द्वारा नगण्य माना गया है जिसे न्यायसंगत एवं प्रासंगिक कहना कठिन है। d-आवरणकों एवं चालन इलेक्ट्रानों के मध्य कार्यरत इन बलों को क्रैव्स[7] क्रम में व्यक्त किया गया है। क्रैव्स क्रम स्वयं में कुछ भ्रान्तियों का शिकार है।

कोचरान[8] के अनुसार क्रैव्स अभिव्यंजना के अन्तर्गत जालकीय-साम्य हेतु बाह्य-बल की आवश्यकता होती है। इस अभिव्यंजना में प्रयुक्त आवरणीय कुलम्ब-विभव के आवरणक (K_c) को प्रारम्भ में तो इलेक्ट्रान-अन्तराल से मुक्त माना जाता है। आयतन-बल से प्राप्त गतिकीय मेट्रिक्स विकसित करने के बाद इसी आवरणांक (K_c) को इलेक्ट्रान-अन्तराल से नाटकीय ढंग से सम्बन्धित कर दिया जाता है। यह नाटक आत्म-विरोधी होकर भ्रांति को जन्म देता है। आवरणांक (K_c) को क्रैव्स-प्रतिरूप में कुछ अंश तक संशोधित किया जाता है। फिर भी इलेक्ट्रानों का पूर्ण स्वतन्त्र रूप ही सब विवेचन में प्रमुखता प्राप्त कर लेता है। परावैद्युत अध्ययन[9-12] इस प्रमुखता को झुठलाते हुए इलेक्ट्रान सम्बन्धी विनयम एवं सहसम्बन्धी ऊर्जाओं का विशिष्ट महत्व प्रतिपादित करते हैं। क्रैव्स प्रतिरूप[7] में प्रयुक्त बारडीन-पद (G^2) को विग्नर-सीट्ज समीकरण में वास्तविक एवं व्युत्क्रम आकश के लिए प्रस्तुत किया गया है। ब्रोस एवं वोह्म[13] तथा रामामूर्ति[14] के अनुसार यह समीकरण जोन-सीमा पर यथार्थ से दूर हट जाता है। क्रैव्स-प्रतिरूप गणनीय दृष्टि से दुरूह होते हुए भी आयतन-बलों की विक्षेपणीय भूमिका को केवल पन्द्रह प्रतिशत तक सीमित रखता है। प्रस्तुत लेख में गणनीय दृष्टि से सरल, प्रासंगिक आत्म-सम्प्रष्टी एवं सैद्धान्तिक दृष्टि से पूर्ण विकसित व्यंजक द्वारा उपरोक्त आयतन-बलों को व्यक्त किया गया है।

(ब) फीलेक प्रतिरूप में आयन-कोरों को मध्य एवं d-आवरणकों के मध्य तत्सम्बन्धित ऊर्जाओं के लिए टेलर श्रेणी के द्वितीय पद को ही महत्व प्रदान किया गया है। स्पष्टतः उक्त श्रेणी के प्रथम पद को शून्य मान लिया गया है। इस प्रकार एक ओर तो प्रमुख अवयवों (आयन-कोरों एवं d-आवरणकों) के मध्य पारस्परिक क्रियाओं का सही विवेचन नहीं हो पाया है तथा दूसरी ओर जालक को एक कृत्रिम-प्रतिबन्ध के अन्तर्गत स्थिरता प्रदान की गई है। प्रस्तुत प्रपत्र में इस स्थिति से उबारने हेतु आयन कोरों एवं d-आवरणकों के मध्य उपयुक्त पारस्परिक क्रियाओं को उनका उचित स्थान प्रदान किया गया है।

(स) फीलेक प्रतिरूप में जालकीय-साम्य को यथोचित रूप में नहीं विचारा गया है। फीलेक द्वारा प्रस्तुत[15] साम्य-विवेचन कुछ शंकाओं[16] से आक्रांत जान पड़ता है। साथ ही साथ यह विवेचन वस्तुस्थिति से दूर हट कर गणनीय दृष्टि से दुरूह हो जाता है। अतः जालकीय साम्य को सरल, आत्म-अविरोधी, प्रासंगिक एवं तर्कसंगत रूप में व्यक्त करने का प्रयास किया गया है।

प्रस्तुत लेखकों ने आयन कोरों के मध्य एवं d-आवरणकों के मध्य कार्यरत पारस्परिक क्रियाओं में से प्रत्येक को टेलर-श्रेणी के प्रथम दो पदों से व्यक्त किया है। अयतन-बलों को भाटिया[17] व्यंजक द्वारा प्रस्तुत किया गया है। इस भाटिया व्यंजक को क्रिस्टलीय विषमदैशिकता हेतु प्रभावी रूप में सक्षम बनाने के लिए बारडीन-गुणक (G^2) को वास्तविक परमाण्वीय-कोष्ठिका के मूल आयतन के लिए परिकलित किया गया है। आवरणीय-प्राचल (K_c) को वोह्म पाइन्स[18] सीमा में मूल्यांकित कर इसे इलेक्ट्रानों की विनमय एवं सहसम्बन्धी ऊर्जाओं के लिए भी संशोधित किया गया है।

जालकीय-साम्य को आयन कोरों, d-आवरणकों एवं चालन इलेक्ट्रानों की प्रभावी ऊर्जाओं के आधीन तर्कसंगत रूप में प्रस्तुत किया गया है प्रस्तुत फीलेक का परिवर्द्धित प्रतिरूप अपेक्षाकृत क्रम-प्राचलों के सहारे फलक-केन्द्रित-संक्रमण धातुओं के लिए विक्षेपण वक्र प्रतिपादित करता है। उदाहरण के तौर पर फलक

केन्द्रित कोबाल्ट में इन विक्षेपण वक्रों को मुख्य दिशाओं में परिकलित किया गया है। न्यूट्रानों के अप्रत्यास्थ-प्रकीर्णन द्वारा प्राप्त प्रायोगिक आँकड़ों को इन प्रतिपादित वक्रों से तुलना हेतु प्रस्तुत किया गया है।

सैद्धान्तिक विवेचन

मुख्य दिशाओं में विक्षेपण आवृत्तियों (ν) को प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित सारणीयक को अवमूल्यित किया जाता है।

$$|M(\mathbf{q})-4\pi^2 m\nu^2 I|=0 \tag{1}$$

जहाँ m आयन-कोर की संहति एवं I एकिक मेट्रिक्स है। गतिकी मेट्रिक्स $M(\mathbf{q})$ के विभिन्न अवयवों की गणना आयन कोरों के चारों ओर उपस्थित वामुमण्डलीय घटकों के मध्य पारस्परिक क्रियाओं के आधार पर की जाती है। तद्स्वरूप $M(\mathbf{q})$ के विकर्णी एवं अविकर्णी अवयवों को निम्नलिखित भाँति व्यक्त किया जाता है।

$$M_{ii}(\mathbf{q})=-4(\beta_1+2\alpha_1)+2(\beta_1+\alpha_1)C_i(C_j+C_K)+4\alpha_1 C_j C_k+K+AD_{ii}+K^2/N \tag{2}$$

$$M_{ij}(\mathbf{q})=-2(\beta_1-\alpha_1)S_i S_j$$

जहाँ α_1 एवं β_1 निकटस्थ कोरों को आबद्ध करने वाले पूर्वलिखित विभव के क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय अवकलन हैं जो तत्सम्बन्धित टेलर-श्रेणी के प्रथम एवं द्वितीय पदों में भी प्रकट होते हैं।

C_i=कोज्या ($\frac{1}{2}aq_i$), S_i=ज्या ($\frac{1}{2}aq_i$), a जालक स्थिरांक है। तरंग वेक्टर $\mathbf{q}$ का i-वाँ घटक q_i है। आयन करों एवं a-आवरणकों के मध्य पारस्परिक क्रिया के फलस्वरूप प्राचल K प्रकट होता है। पद N को निम्नलिखित सारणीयक के हल द्वारा प्राप्त किया जाता है।

$$|M'(\mathbf{q})-NI|=0 \tag{3}$$

जहाँ $M'(\mathbf{q})$, d-आवरणकों को अपने चारों ओर उपस्थित अन्य आवरणकों, आयन कोरों एवं चालन इलेक्ट्रानों से पारस्परिक क्रिया के फलस्वरूप उत्पन्न होता है। इस गतिकी मेट्रिक्स के विभिन्न अवयव निम्न प्रकार लिखे जाते हैं।

$$M'_{ii}(\mathbf{q})=4(\beta_1'+2\alpha_1')-2(\beta_1'+\alpha_1')C_i(Cj+C_K)-4\alpha_1'C_jC_K+K-A'D_{ii} \tag{4}$$

$$M'_{ij}(\mathbf{q})=2(\beta_1'-\alpha_1')S_iS_j$$

जहाँ α_1' तथा β_1', d-आवरणकों को युग्मित करने वाले केन्द्रित-विभव के क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय अवकलज हैं। समीकरण (2) तथा (3) में उपस्थित A तथा A' क्रमशः चालन इलेक्ट्रानों के आयन कोरों एवं d-आवरणकों के विस्थापनों के प्रत्युत्तरस्वरूप विरूपक प्राचल है। तत्सम्बन्धित गतिकी मेट्रिक्स D को संशोधित भाटिया क्रम में निम्न प्रकार से लिपिबद्ध किया जा सकता है,

$$D_{ii}=\frac{q_i^2\epsilon(q)K_c^2\Omega g^2}{a[\epsilon(\mathbf{q})K_c^2+|q|^2]} \tag{5}$$

जहाँ Ω परिमाण्वीय आयतन है। आवरणीयक प्राचल K_c को वोह्ल पाइन[18] परिसीमा में प्राप्त किया गया है। पराबैद्युत-फलक $\epsilon(\mathbf{q})$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\epsilon(\mathbf{q})=\epsilon_H(\mathbf{q})[1-S(\mathbf{q})] \qquad (6)$$

जहाँ $\epsilon_H(\mathbf{q})$ ज्ञात हार्टी फलन है तथा $S(\mathbf{q})$ एक संशोधन पद है। इस पद को इलेक्ट्रानों की विनिमय एवं सहसम्बन्धी ऊर्जाओं से व्युत्पन्न माना जाता है। प्रस्तुत पत्र में मण्डल आदि[12] द्वारा प्रतिपादित सैद्धान्तिक विवेचन को $S(\mathbf{q})$ के परिकलन हेतु प्रयुक्त किया गया है।

वाडीन गुणक (g^2) को अतिव्यवहारिक रूप में परमाण्वीय-कोष्ठिका के वास्तविक रूप के लिए प्राप्त किया जाता है। तत्सम्बन्धित सूत्र निर्देश [13] एवं [14] में दिये गये हैं। प्रस्तुत लेख में रामामूर्ति[14] के सूत्रों द्वारा g^2 का मान मुख्य दिशाओं में मूल्यांकित किया गया है। प्रस्तुत गुणक g^2 आभासी गणनाओं के रूप गुणक की भूमिका निभाता है। अतः इसकी शुद्धता पर विशेष ध्यान देना अपेक्षित है।

जालक की स्थिरता के लिये सम्पूर्ण ऊर्जा (E) को निम्नलिखित भाँति व्यक्त किया जाता है।

$$E=E_c+E_d+E_e \qquad (7)$$

जहाँ आयन कोरों, d-आवरणकों एवं चालन इलेक्ट्रानों की आयतन ऊर्जायें क्रमशः E_c, E_d एवं E_e है। जालकीय साम्य के लिये $\partial E/\partial\Omega$ को विलुप्त होना चाहिये अर्थात्

$$\frac{\partial}{\partial\Omega}(E_c+E_\alpha+E_e)=0 \qquad (8)$$

अर्थात्

$$\alpha_1-\alpha_1'=-a/4\,P_e \qquad (9)$$

जहाँ α_1 तथा α_1' क्रमशः E_c एवं E_d से सम्बन्धित हैं तथा इलेक्ट्रान दाब (P_e), E_e द्वारा प्राप्त किया जाता है। E_e के विभिन्न प्रभागीय ऊर्जाओं अर्थात् फर्मी, विनिमय तथा सहसम्बन्धी ऊर्जाओं का विस्तृत विवेचन एवं तत्सम्बन्धित विश्लेषण प्रस्तुत लेखकों[19] द्वारा पहिले ही दिया जा चुका है। इस विश्लेषण के आधार पर ही इलेक्ट्रान अन्तराल 3 के लिये P_e का मान निकाला गया है। विरूपक प्राचल A को प्राप्त करने के लिये निम्नलिखित सूत्र को आधार माना जाता है।

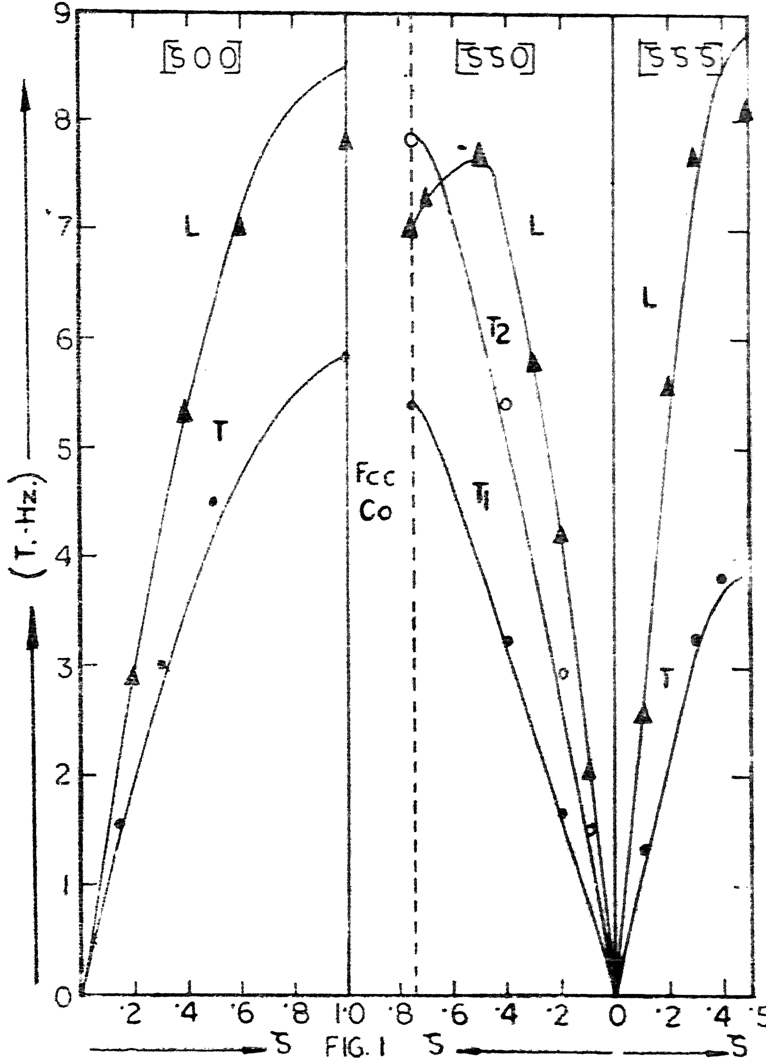
$$A=-a\Omega\frac{\partial^3 E_e}{\partial\Omega^2} \qquad (10)$$

A का मान भी उक्त निर्देश [19] से उद्धृत किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

फीलेक के इस परिवर्द्धित प्रतिरूप में सात प्राचल विद्यमान हैं। इनमें से दो का मान समीकरण (9) एवं (10) की सहायता से निकाला जाता है। शेष पाँच प्राचलों का मान निम्नांकित समीकरणों के माध्यम से प्राप्त किया जा सकता है।

$$ac_{11} = -2\beta_1 - 2\alpha_1 - 2\beta_1' - 2\beta_1' - 2\alpha^{4'} + A + A'$$
$$ac_{12} = -\beta_1 + 5\alpha_1 - \beta_1' + 5\alpha_1' + A + A'$$
$$ac_{44} = -\beta_1 - 3\alpha_1 - \beta_1' - 3\alpha_1'$$
$$m\omega^2_{T_{100}} = -[4(\beta_1 + 3\alpha_1) + K] + \frac{K^2}{K + 12\alpha_1' + 4\beta_1'} \qquad 11)$$
$$m\omega^2_{T_{111}} = -[2(\beta_1 + 5\alpha_1) + K] + \frac{K^2}{K + 2\beta_1' + 10\alpha_1'}$$



चित्र 1–कोबाल्ट के लिए विक्षेपण वक्र प्रस्तुत प्रतिरूप से प्राप्त, (▲ ●, O) शेपीरों एवं मौस[20] द्वारा मापी गई आवृत्तियाँ ।

फलककेन्द्रित कोबाल्ट के विक्षेपण वक्रों के परिकलन हेतु आवश्यक आँकड़े एवं तदुपरांत परिकलित प्राचल संलग्न सारणी 1 में दर्शाये गये हैं। विक्षेपण वक्रों को दिये गये चित्र 1 में सतत रेखाओं द्वारा दिखाया गया है। शेपीरों एवं मौस[20] द्वारा मापित प्रयोगिक-विक्षेपण आवृत्तियों को उक्त चित्र में (▲, ●, ○) बिन्दुओं द्वारा परितुलना हेतु प्रस्तुत किया गया है।

सारणी 1

फलककेन्द्रित कोबाल्ट के लिये आवश्यक आँकड़े एवं परिकलित प्राचल

आँकड़े		परिकलित प्राचल (10^4 डाइन/से०मी०)
$C^*_{11} = 2.21$	$\times 10^{12}$ dyne/cm^2	$\alpha_1 = 0.24488$
$C^*_{12} = 1.47$		$\beta_1 = -3.99816$
$C^*_{44} = 1.24$		$\alpha_1' = 0.198871$
$a = 3.55 A^\circ$		$\beta_1' = -1.7351$
$m = 58.7$ *amu*		$K = -0.21029$
$\nu^\times_{T(100)} = 5.87\ T.H_z$		$A = 0.063818$
$\nu^*_{T(111)} = 3.86\ T.H_z$		$A' = -2.79732$

*शेपीरो एवं मौस[20]

चित्र 1 के निरीक्षण से यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रस्तुत प्रतिरूप धातु विशेष में विक्षेपण वक्रों को भलीभाँति निरूपित करता है। विक्षेपण आवृत्तियों के प्रयोग द्वारा प्राप्त लक्षण इस प्रतिरूप द्वारा भली-भाँति पुष्ट होते हैं।

निर्देश

1. फीलेक, बी०एल०, **जर्न०फिज०**, 1975, F-5, 17
2. जानी, ए०आर० तथा गोहिल, बी०बी०, **जर्न०फिज०**, 1976, F-**6**, L-25
3. खन्ना, आर० एन० तथा राठौर, आर० पी० एस०, **इण्डि० जर्न० प्योर० एन्ड एप्ला० फिजि०**, 1978, **18**, 722
4. सिंह, बी०पी०, पाठक, एल०पी० तथा हेमकर, एम०पी०, **जर्न०फिज०सोसा०** जापान, 1978, **45**, 484

5. सिंह, वी०पी० तथा हेमकर, एम०पी०, **जी०नेचरों फो०**, 1976, **A-34**, 310

6. सिंह, वी०पी०, पाठक, एल०पी० तथा हेमकर, एम०पी०, **जर्न०फिज०** 1978, F-**8**, 2493

7. क्रैक्स, के०, **फिज०रिव०**, 1965, **138**, A143

8. कोचरान, डब्ल्यू, **प्रो०इंटरने०कोन फ्रे०ले०डाइना० एडिटर वालीज आर०एफ०**, (पर्गमैन प्रेस आक्सफोर्ड) 1965, पृष्ठ 83

9. वशिष्ठ, पी० तथा सिंग्वी, के०एस०, **फिज०रिव०** 1972, B-**6**, 875

10. सिंग्वी, के०एस०, टोसी, एम०पी०, लैंड, आर०एच० तथा स्जोलैडर ए०, **फिज०रिव०** 1968, **176**, 589

11. विडैल, के० तथा ब्राउन, जी०ई०, **फिज०रिव०** 1977, B-**17**, 4512

12. मंडल, एस०एस०, राव, बी०आर० तथा त्रिपाठी, डी०एन०, **फिज०रिव०** 1978, B-**18**, 2324

13. ब्रोस, एच० तथा बोह्म जी०, **फिज०स्टेटस सोलिडी** 1967, **20**, 277

14. रामामूर्ति, बी०, **प्रमान**, 1978, **11**, 233

15. फीलेक, वी०एल०, **जर्न०फिज०** 1978, F-**8**, 577

16. शुक्ला, एम०एम०, **जर्न०फिज०**, 1978, F-**8**, L-289

17. फीलेक, वी०एल०, **जर्न०फिज०**, 1978, F-**8**, L-283

18. भाटिया, ए०बी०, **फिज०रिव०** 1955, **97**, 363

19. वोह्म, डी० तथा पाइन्स, डी०, **फिज०रिव०** 1953, **92**, 609

20. राठौर, आर०पी०एस० तथा अग्रवाल, आर०एम०, **फिज०स्टेटस सोलिडी** 1980, b **97**, 597

21. शेपीरो, एस०एम० तथा मौस, एस०सी, **फिज०रिव०**, 1977, **15**, 2726

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 383-388

गोबर से व्युत्पन्न जैविक गैस पर निकेल एवं कैडमियम का प्रभाव

कृष्ण बहादुर, ओ० प्र० सिंहल, सु० रंगनायकी, चन्द्र मोहन, उषा ज्योतिष्मती एवं राजेन्द्र प्रसाद तिवारी

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 16, 1981]

सारांश

दो भारी धातु जैसे निकेल एवं कैडमियम का प्रभाव गाय के गोबर के अवायु अथवा अनॉक्सी किण्वन पर परखा गया। इस परीक्षण द्वारा यह ज्ञात हुआ कि गाय के गोबर से व्युत्पन्न जैविक गैस में अच्छी खासी वृद्धि हुई। यहाँ तक कि नियंत्रित परीक्षण में व्युत्पन्न जैविक गैस की मात्रा की अपेक्षा 32.30 मि० मोल निकेल सल्फेट और 30.45 मि० मोल कैडमियम नाइट्रेट की पृथक-पृथक उपस्थिति जैविक गैस की मात्रा को दुगुना तक बढ़ा देती है।

Abstract

Effect of Ni and Cd on biogas production from cowdung. *By* K. Bahadur, O. P. Singhal, S. Ranganayaki, C. Mohan, Usha Jyotismati and R. P. Tiwari, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

The effect of two heavy metals viz. Ni and Cd has been studied on anaerobic fementation of cow dung. It has been found that both metals significantly increase the biogas production from cow dung. In presence of 32.30 mM. nickel sulphate and 30.45 mM cadmium nitrate the increase in biogas in more than twice the amount of biogas produced in control.

प्रतिक्रिया में भाग लेने वाले एन्ज़ाइम के निकलते ही धात्विक आयनों का जैविक उत्प्रेरण में प्रभावकारी सहयोग प्राप्त होता है। वारबर्ग[1] ने 1949 में जिन एन्ज़ाइमों का विस्तृत अध्ययन सर्वप्रथम किया उन एन्ज़ाइमों में आयरन की उपस्थिति पायी गई। तिवारी एवं पाण्डे[3] ने एवं

इनके अन्य सहयोगियों ने[2] (1979) बहुत प्रकार के धात्विक आयनों का आक्सीजन की उपस्थिति में और साथ ही साथ आक्सीजन की अनुपस्थिति में उत्तेजनापूर्ण प्रभाव देखा ।

पलेट एवं रोथ[1] ने मेथेनोजेन अर्थात् मेथेनोत्पादक बैक्टीरिया की वृद्धि एवं मेथेन के उत्पादन पर सोडियम क्लोराइड का प्रभाव देखा । निम्न सान्द्रता पर सोडियम क्लोराइड की उपस्थिति सूक्ष्मजीवाणुओं की वृद्धि एवं मेथेन का उत्पादन बढ़ा देती है, परन्तु सोडियम क्लोराइड की अधिक सान्द्रता इनकी वृद्धि एवं मेथेन का उत्पादन कम कर देता है । बोलवर्टन[5] ने अपने सहयोगियों के साथ जलीय हायासिन्थ का आक्सीजन की अनुपस्थिति में सूक्ष्मजैविकी विच्छेदन मेथेन गैस में किया और देखा कि निकेल एवं कैडमियम इस विच्छेदन की प्रक्रिया में प्रभावकारी हैं ।

प्रस्तुत लेख में गाय के गोबर से प्राप्त जैविक गैस पर आक्सीजन की अनुपस्थिति में धात्विक आयनों जैसे निकेल एवं कैडमियम के प्रभाव का अध्ययन किया गया है ।

प्रयोगात्मक

ताजे गाय के गोबर का 600 ग्राम लेकर 2.5 लिटर जल में घोला गया । इस घोल को एक किण्वन फ्लास्क के 3 लिटर में लेने के बाद फ्लास्क को मुँह तक पूरा-पूरा जल से भर दिया गया जिससे कि आक्सीजन-रहित वातावरण हो जाय । इस प्रकार से तैय्यार फ्लास्क को एक ऐसे रबर के कार्क से बन्द कर दिया गया जिसमें प्रक्रिया के द्वारा उत्पन्न गैस के निकलने के लिए एक द्वार हो । उत्पन्न गैस को एक अंशांकित सिलिन्डर में जल-विस्थापन विधि द्वारा एकत्र किया गया । किण्वन फ्लास्क को 20 दिनों तक 34° ताप पर उद्भवन के लिये रखा गया ।

किण्वन मिश्रण के 3.0 मिली० घोल को आठ विभिन्न वारबर्ग फ्लास्कों में रखा गया । इन वारबर्ग फ्लास्कों में निकेल की विभिन्न सान्द्रताओं 0.0, 6.46, 12.92, 19.38, 25.84, 32.30, 38.76, 45.22 मि० मोल का जैविक गैस की उत्पत्ति पर प्रभाव परखने के लिए प्रत्येक फ्लास्क में क्रमशः 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 मि० लीटर (सान्द्रता–68 मि०ग्राम/मि० लीटर) निकेल सल्फेट डाला । नियंत्रण हेतु एक फ्लास्क निकेल सल्फेट रहित रखा गया । प्रत्येक वारबर्ग फ्लास्क में तरल का कुल आयतन 5 मि० ली० रखने के लिए आवश्यक जल की मात्रा डाली गई ।

इसी प्रकार कैडमियम की विभिन्न सान्द्रताओं 0.0, 10.15, 20.30, 30.45, 40.60, 50.75, 60.91 मि० मोल का प्रभाव जैविक गैस की उत्पत्ति पर प्रभाव परखने के लिये क्रमशः 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8 मि० ली० कैडमियम नाइट्रेट (सान्द्रता–42 मि० ग्राम०/मि० ली०) सात वारबर्ग फ्लास्कों में डाला गया । आठवें फ्लास्क को नियंत्रण के रूप में कैडमियम नाइट्रेट रहित रखा गया । प्रत्येक फ्लास्क में तरल का कुल आयतन 5 मि० ली० रखने के लिये आवश्यक जल की मात्रा डाली गई ।

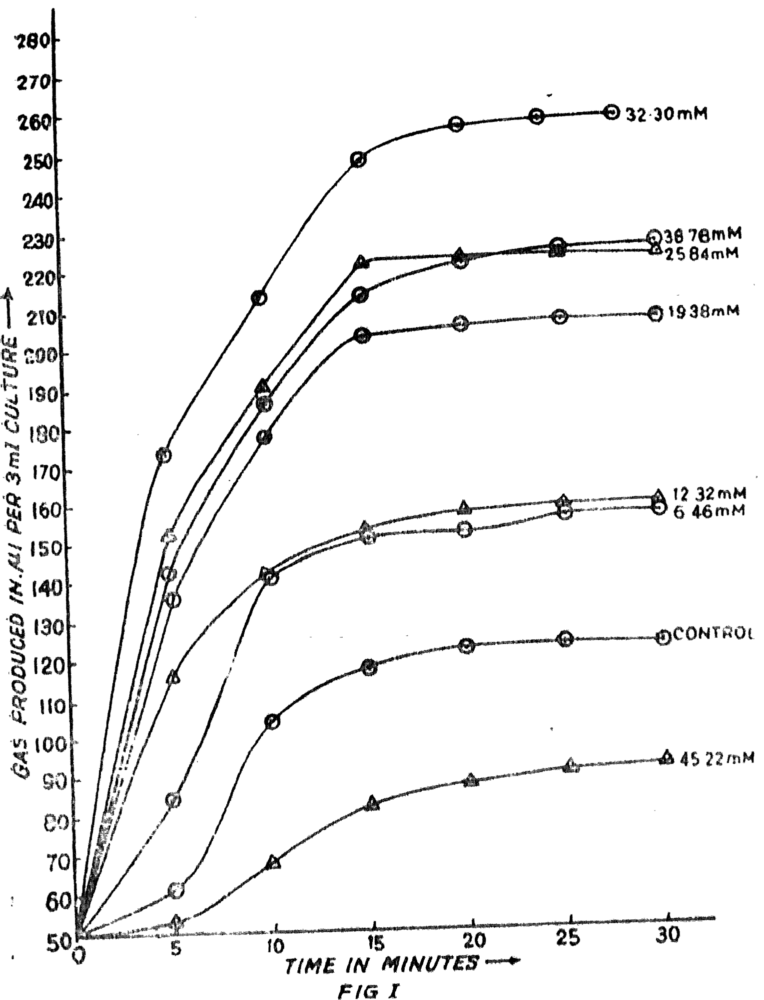

EFFECT OF NICKEL ON THE FORMATION OF BIOGAS
GAS PRODUCED IN µl PER 3ml CULTURE
TIME IN MINUTES
32·30mM
38·76mM
25·84mM
19·38mM
12·32mM
6·46mM
CONTROL
45·22mM

FIG I

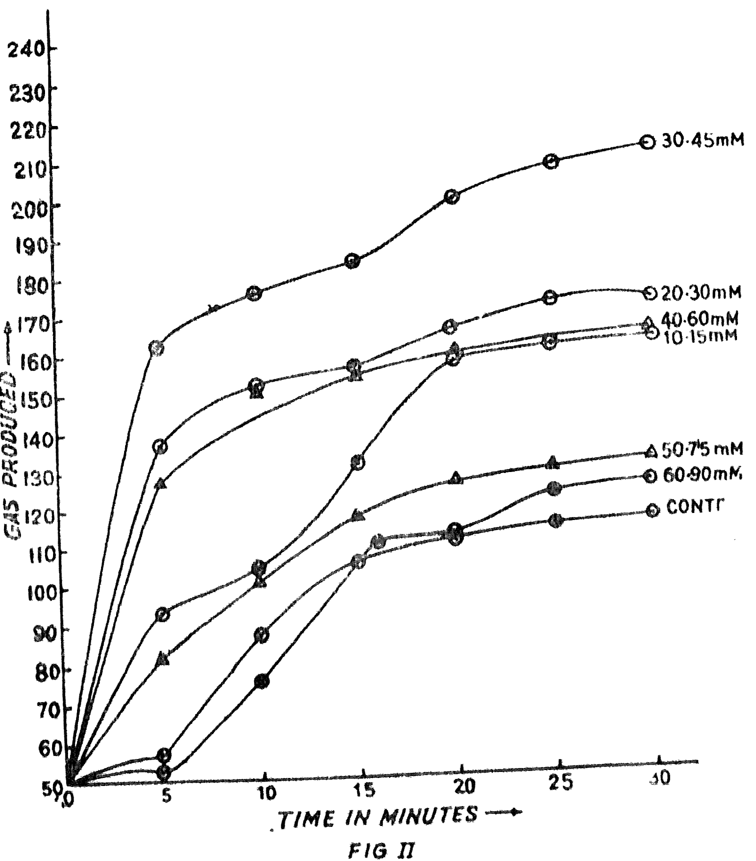

EFFECT OF CADMIUM ON THE FORMATION OF BIOGAS
GAS PRODUCED
TIME IN MINUTES
30·45mM
20·30mM
40·60mM
10·15mM
50·75mM
60·90mM
CONTR

FIG II

सारणी 1

निकेल का प्रभाव

जैविक गैस की मात्रा माइक्रो लीटर में प्रति 3 मि० ली० संवर्धन माध्यम द्वारा निकेल सल्फेट की अधोलिखित मात्रा की उपस्थिति में

समय मिनट में	नियन्त्रक निकेल सल्फेट रहित	निकेल सल्फेट की सान्द्रता मि० मोल में						
		6.46	12.92	19.38	25.84	32.30	38.76	45.22
0	0	0	0	0	0	0	0	0
.5	60.52	84.53	116.88	135.66	151.32	173.23	142.97	51.13
.10	104.36	140.88	141.92	177.41	189.93	213.93	186.80	67.99
.15	116.88	151.32	152.36	203.50	222.28	248.37	213.93	81.40
.20	122.14	152.36	158.62	205.58	223.33	257.76	221.24	86.61
.25	123.14	155.45	158.02	206.63	224.37	257.76	225.41	90.79
.30	124.14	155.40	159.67	206.63	224.37	258.04	226.46	90.79

सारणी 2

कैडमियम का प्रभाव

जैविक गैस की मात्रा माइक्रोलीटर में प्रति 3 मि० ली० संवर्धन माध्यम द्वारा कैडमियम नाइट्रेट की विभिन्न मात्राओं की उपस्थिति में

समय मिनट में	नियन्त्रक निकेल सल्फेट रहित	कैडमियम नाइट्रेट की सान्द्रता मि० मोल में					
		10.15	20.30	30.45	40.60	50.75	60.90
0	0	0	0	0	0	0	0
.5	56.35	93.92	136.71	136.84	127.31	81.4	52.18
.10	88.70	103.55	152.36	175.32	150.27	100.18	75.13
.15	105.40	130.45	155.49	182.63	153.40	117.92	110.62
.20	111.66	157.58	164.88	199.32	158.62	126.27	111.66
.25	114.79	160.71	171.15	206.63	160.71	129.40	123.14
.30	116.88	162.80	172.16	211.85	165.93	131.49	125.23

प्रत्येक फ्लास्क का सम्बन्ध मेथिलीन ब्लू के जलीय घोल से भरे दाबांतरमापी (मैनोमीटर) से कर दिया तथा हल्लित्र (शेकर) में फिट कर दिया। इन फ्लास्कों को ऊष्मक में 34° सेण्टीग्रेड पर 20 मिनट तक रखा तथा तापमान स्थायी रखने के लिये टोंटी खोल दी। तत्पश्चात् टोंटी बन्द करके प्रत्येक 5 मिनट के अन्तराल पर साथ ही निरन्तर हिलाते हुए व्युत्पादित गैस की मात्रा लिपिबद्ध करते रहे।

परिणाम तथा विवेचन।

परिणामों को सारणी 1 तथा 2 में उद्धृत किया गया है तथा लेखाचित्र के रूप में चित्र 1 तथा 2 में खींचा गया है। जैसा कि परिणामों से प्रत्यक्ष है, निकेल एवं कैडमियम दोनों गोबर की अनॉक्सी दशा में सूक्ष्मजैविक किण्वन को उत्तेजित करते हैं।

किण्वन मिश्रण द्वारा जैविक गैस की व्युत्पत्ति में वृद्धि निकेल सल्फेट की सान्द्रता संवर्धन माध्यम में बढ़ाने से होती है, जब तक निकेल सल्फेट की सान्द्रता 32.30 मि० मोल तक रहती है। उससे अधिक सान्द्रता में जैविक गैस की मात्रा में ह्रास प्रेक्षित हुआ तथा संवर्धन माध्यम में निकेल सल्फेट की मात्रा अल्प होने पर जैविक गैस की व्युत्पत्ति अत्यन्त लघु मात्रा में होती है।

जैविक गैस की सर्वाधिक उत्पत्ति निकेल सल्फेट की 32.30 मि० मोल सान्द्रता में प्रेक्षित हुई, तथा निकेल सल्फेट की इस सान्द्रता में जैविक गैस की उत्पत्ति नियन्त्रण वाले जार की तुलना में दुगुनी थी।

संवर्धन माध्यम में कैडमियम नाइट्रेट की सान्द्रता 10.15, 20.30, 30.45, 40.60, तथा 50.75 मि० मोल उपस्थित होने पर जैविक गैस की उत्पत्ति में वृद्धि हुई। कैडमियम नाइट्रेट के विषय में जैविक गैस की सर्वाधिक उत्पत्ति कैडमियम नाइट्रेट की 30.45 मि० मोल सान्द्रता की उपस्थिति में प्रेक्षित हुई, जो नियंत्रण वाले जार की तुलना में लगभग दुगुनी थी।

कैडमियम नाइट्रेट की इससे अधिक सान्द्रता होने पर जैविक गैस की उत्पत्ति में ह्रास होता है परन्तु कैडमियम नाइट्रेट की अत्यधिक सान्द्रता जैसे 60.90 मि० मो० में परीक्षण करने पर जैविक गैस की उत्पत्ति में अवरोध प्रेक्षित हुआ।

निर्देश

1. पलेट, जी० बी० रॉथ, एल० ए०, **कैन० ज० माइक्रोलॉयल०** 1977, **23(7)**, 893-7
2. तिवारी, के० पी० मिश्रा निशि तथा पाण्डे, अशोक, **प्रोसी० नेशनल० एकेडे० साइ० (भारत)**, 1979, **49A** (4)
3. तिवारी, के० पी० तथा पाण्डे, अशोक, **इण्डियन ज० डेरी साइन्स**, 1978, **31(4)**, 83-4
4. वारबर्ग ओ०, हेवी मेटल प्रोस्थेटिक ग्रुप एण्ड एन्ज़ाइम एक्शन, आक्सफोर्ड यूनि० प्रेस (लन्दन) 1949.
5. वॉल्वर्टन, बी० सी०, मैक्डोनॉल्ड, आर० सी० तथा गार्डन, जे०, **नासा टेक्न० मीमों०, नासा-टी० एम०-एक्स** 1974. 72725, **13** पृ०,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 4, October, 1981, Pages 389-398

पर्वत गिरनार (जूनागढ़ जिला, गुजरात) के दक्षिण-पूर्वीय भाग का एक संरचनात्मक अध्ययन

अखिलेश्वर तिवारी
भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 11, 1980]

सारांश

काठियावाड प्रायद्वीप के दक्षिण में स्थित पर्वत गिरनार, डकेन-ट्रैप प्रवाह (लेट क्रिटेशियस-अर्लो इयोसिन काल) का एक महत्वपूर्ण अंश है, जो अपने संरचनायुक्त आग्नेय शैलों द्वारा राष्ट्रीय एवं अन्तर्राष्ट्रीय भू-वैज्ञानिकों का ध्यान आकर्षित करता रहा है। प्रस्तुत अध्ययन-क्षेत्र (गिरनार का दक्षिण-पूर्वीय भाग) के आग्नेय शैलों में उपस्थित संरचनाओं का अध्ययन हॉस क्लूज द्वारा वर्णित संरचनाओं के आधार पर किया गया है। इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि गिरनार पर्वत के स्थानीय शैलों में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के संघटन वाले द्रवीभूत-शैलों (मैग्मा) का अन्तर्वेधन (मुख्यतः शंकु-चादर के रूप में) हुआ है जिसके परिणामस्वरूप यहाँ विभिन्न प्रकार की संरचनाएँ विकसित हुई हैं।

Abstract

A structural study of the south-eastern part of Girnar hills, District Junagadh, Gujarat. *By* Akhileshwar Tiwary, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The mount Girnar resembles Deccan-trap flow (late cretaceous to early eocene age) and forms a characteristic and captivating landmark in the southern part of Kathiwar peninsula. It comprises of various types of igneous rocks i.e. basic (Basalt, Gabbro), intermediate (Syenite, Lamprophyre) and acidic (Granite, Granophyre, Quartz-porphyry) with numerous sets of complex structures. For the present investigation, its south-eastern part (Toposheet No. 41 K_6) ranging between longitudes 70° 33′ 22″ E to 70° 35′ 13″ E and latitudes 21° 28′ 54″ N to 21° 30′ 45″ N, is taken into consideration and the structures existing in its rocks can be classified into primary (flow structures and primary fracture system) and secondary (secondary

joints and faults) structures which have developed either during the consolidation of magma or after the commencement of consolidation due to the tectonic disturbances and intrusive-extrusive activities.

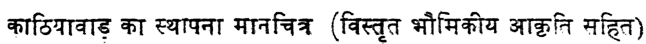
On the basis of structural behaviours of its rocks, it can be rightly concluded that the Girnar complex has sustained and experienced a number of intrusive activities at irregular intervals of time as a result of intrusions of various compositions of magma. In the first stage of intrusion, the country rock (Basalt) was domed up due to intrusive effect of basic magma (Gabbroic nature), giving rise to several conical and concentric fractures in which magma strarted intruding as major cone-sheets and some conical fractures developed as faults. In the next stage, the marginal granophyre and associated rocks appeared as cone-sheets in the peripheral hills, due to intrusive activities of acidic magma. Besides these, several minor intrusions occurred within the country rocks, which exhibit concordant or discordant reialions with it.

पर्वत गिरनार अशोक-काल के पूर्व से ही मानव-हृदय को आकर्षित करता रहा है तथा अभी भी प्रतिदिन हजारों तीर्थ-यात्रियों के भक्तिपूर्ण स्वरों से प्रतिध्वनित होता रहता है जो जूनागढ़ से मात्र 3 किमी० (पूरब) दूर तलेटी से प्रारम्भ होकर देश के प्रत्येक भाग से अच्छे यातायात साधनों द्वारा सम्बन्धित है (गिरनार पर्वत का स्थापना मानचित्र देखें)। प्रस्तुत अध्ययन-क्षेत्र गिरनार डकैन ट्रैप (अन्तिम क्रिटेशियस से प्रारम्भिक इयोसिन) का एक महत्वपूर्ण भाग है जो देशांश 70° 33′ 22″ पू०-70° 35′ 13″ पू० तथा अक्षांश 21° 28′ 54″ अ० –21° 30′ 45″ अ० के मध्य अवस्थित है। इस क्षेत्र के सभी आग्नेय शैलों-अल्पसिलिक (बेसाल्ट, ग्रैबो), मध्यसिलिक (साइनाइट, लैम्प्रोफायर, डाइयोराइट) एवं अधिसिलिक (ग्रेनाइट, ग्रेनोफायर, क्वार्ट्ज पोरफाइरी) में संरचनाएँ उपस्थित हैं जिनके अध्ययन से द्रवीभूत-शैलों के विस्थापन, शैल-जनन तथा आग्नेय शैलों के स्वरूप आदि से सम्बन्धित ज्ञान उपलब्ध होता है।

सर्वप्रथम फ्रान्सीसफेडेन (1884) ने भौमिकी दृष्टि से इस भू-खण्ड का अध्ययन कर यहाँ के शैलों को साधारण रूप से वर्गीकृत किया था। उसके बाद इवान्स, कृष्णन,[1] माथुर, फ्रिगरन[2] देसाई, वेस्ट, चटर्जी, बोस, सुब्बाराव[5] एवं अन्य भू-वैज्ञानिकों ने यहाँ के शैलों का शिलावीक्षण किया एवं शैल-जनन से सम्बन्धित अपने विचार व्यक्त किये। लेकिन अभी भी यहाँ की बहुत समस्याएँ विवादास्पद हैं जिन पर अत्यधिक शोध की आवश्यकता है।

प्रमुख संरचनाएं

आग्नेय शैलों में कुछ संरचनाएँ संपीडन की अवस्था में उत्पन्न होती हैं जिन्हें प्राथमिक संरचना कहते हैं तथा कुछ संपीडन क्रिया के उपरान्त विभिन्न प्रकार के तनन-प्रतिबल, बहिर्वेधी या अन्तर्वेधी क्रियाओं द्वारा उत्पन्न होती हैं जिन्हें द्वितीयक संरचना की श्रेणी प्राप्त होती है। प्राथमिक संरचनाओं की उत्पत्ति द्रवीभूत-शैलों (मैग्मा) की श्यानता, उसकी सदृश्यता, उसके अन्तःक्षेपण की अवस्था आदि पर



काठियावाड़ का स्थापना मानचित्र (विस्तृत भौमिकीय आकृति सहित)

पर्वत गिरनार के दक्षिणी पूर्वी भाग का भौमिकीय मानचित्र (प्रमुख संरचनाओं सहित)

निर्भर करती है। मगर द्वितीयक संरचनाएँ मुख्यतः वलकृत कारणों का प्रतिफल हैं जिनके अध्ययन से द्रवीभूत-शैलों से सम्बन्धित कोई विशेष जानकारी नहीं मिलती।

गिरनार पर्वत के दक्षिण-पूर्वीय क्षेत्र के आग्नेय शैलों में उपस्थित संरचनाओं को उनकी उत्पत्ति के आधार पर दो भागों-प्राथमिक एवं द्वितीयक में वर्गीकृत किया जा सकता है लेकिन प्रस्तुत शोध-पत्र में प्राथमिक संरचनाओं के अध्ययन पर ही केन्द्रित रहने का प्रयास किया गया है।

1. प्राथमिक संरचनाएँ

वर्त्तमान अध्ययन-क्षेत्र में उपस्थित प्राथमिक संरचनाओं को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है :

(I) **प्राथमिक प्रवाही संरचनाएं** (Primary Flow Structures) : गिरनार पर्वत के इस क्षेत्र में, लासापवन एवं बबेरियों थोथ पहाड़ियों के ग्रैब्रोइक शैलों में प्रवाही संरचनाएँ सुस्पष्ट एवं व्यापक रूप में उपस्थित हैं। यहाँ पर शैलों की नति 18-25° है जो मध्य भाग की ओर क्रमशः बढ़ती जाती है। इन पहाड़ियों पर पट्टित समानता एवं प्रवाही-स्तर बहुत ही स्पष्ट हैं तथा 18-25° की नति पर नतिलम्बित है। (चित्र 1)। इनकी उत्पत्ति लावा-प्रवाह के प्रक्रम में इनके खण्डों द्वारा समानान्तर मसूराकार राशियों, धारियों, पट्टों तथा रेखाओं में दीर्घित हो जाने से होती है। साथ ही साथ उत्पत्ति द्रवीभूत-शैलों की समाँगता, उनकी श्यानता एवं उनके अन्तःक्षेपण की अवस्था एवं मैग्मा के ठंडे होने की गति पर भी निर्भर करती है। इन प्राथमिक संरचनाओं को पुनः दो भागों — रेखीय एवं पट्टित संरचनाओं में विभाजित किया जा सकता है।

(क) **रेखीय प्रवाही संरचनाएं** (Linear Flow Structures) : वर्त्तमान अध्ययन-क्षेत्र के आग्नेय शैलों में उपस्थित रेखीय प्रवाही संरचनाएं शैलों में मुख्यतः खनिज-कणों एवं कहीं-कहीं मूल-थक्कों एवं अपगाश्मों की रेखीय-समानता प्रदर्शित करती हैं। ये अधिकांशतः शैलों के नतिलम्ब की दिशा में ही नतिलम्ब हैं तथा केन्द्रमुखी नति दिखलाती हैं। ये संरचनाएं उस समय विन्यस्त होती हैं जब द्रवीभूत-शैल अपने निलम्बन में ठोस क्रिस्टल लिये संपीडन की अवस्था से गुजरता है। हाइड्रोमेकैनिक्स के नियमानुसार गतिशील द्रव में निलम्बित सभी ठोस-पदार्थ अपने को इस प्रकार अभिविन्यस्त करना चाहते हैं कि उनकी सतहों पर लगने वाले दबावों में गतिकीय सन्तुलन आ जाए, जिससे उन्हें एक निश्चित प्रतिरूप ग्रहण करने का अवसर प्राप्त हो सके। अतः इन संरचनाओं के अध्ययन से द्रवीभूत-शैलों की प्रवाह-दिशा, उनकी श्यानता आदि के बारे में जानकारी प्राप्त होती है।

(ख) **पट्टित प्रवाही संरचनाएं** (Platy Flow Structures) : पर्वत गिरनार के इस भू-खण्ड में, मुख्यतः ग्रैब्रोइक शैल, पट्टित प्रवाही संरचनायुक्त हैं जो 18-23° केन्द्रमुखी नति प्रदर्शित करती हैं। इनका अध्ययन स्पष्ट रूप से लासापवन पहाड़ी (चित्र 1 देखें) पर किया गया है। यहाँ के प्रवाही-स्तर एक ही प्रकार के खनिज पदार्थों से बने हैं मगर उनकी प्रतिशत मात्राएं भिन्न-भिन्न हैं। इन स्तरों की सीमारेखाएं कहीं स्पष्ट हैं तो कहीं क्रमिक, तथा इनकी लम्बाई-मोटाई भी परिवर्तनशील है लेकिन प्रत्येक



चित्र 1



चित्र 2

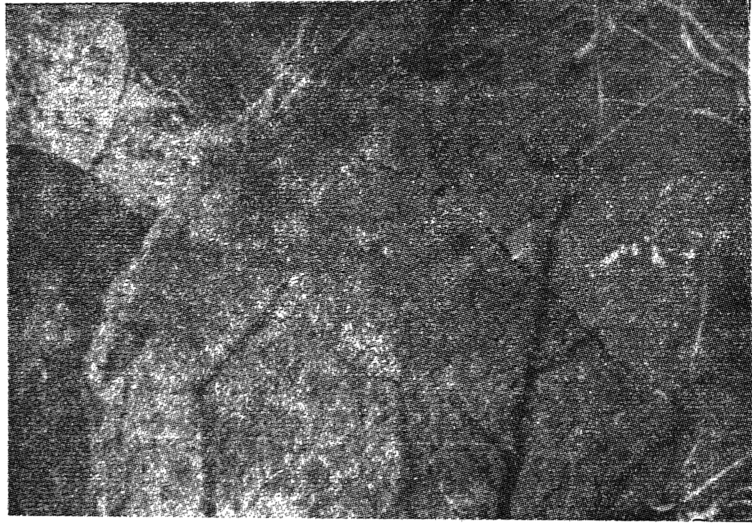
अवस्था में ये प्रवाही स्तर एक दूसरे के समान्तर हैं। इनकी उत्पत्ति प्रवाह-अवस्था में होती है जब पट्टित पदार्थ जो पटलित प्रवाह-दिशा वाले द्रवीभूत-शैल में उपस्थित होता है, अपने को इस प्रकार विन्यस्त करना चाहता है कि उसकी सबसे लम्बी सतह द्रव-स्तर के समान्तर हो जाय। अतः यह लक्ष्य क्रिस्टलों (फेल्सपार एवं हार्नब्लेन्डा) एवं प्रवाही-स्तरों के समान्तर होने की क्रिया है।

(II) **प्राथमिक विभंग पद्धति** (Primary Fracture System) : गिरनार पर्वत के सभी प्रकार के आग्नेय शैलों में प्राथमिक विभंग पद्धति (मुख्यतः सन्धियाँ) स्पष्ट या जटिल रूप में दृष्टिगोचर हैं। इनके अध्ययन के लिए प्रवाही संरचनाओं का अध्ययन आवश्यक है क्योंकि सिर्फ उन्हीं सन्धियों की संरचनात्मक भूमिका के बारे में निष्कर्ष निकाला जा सकता है जो प्रवाही संरचनाओं से स्पष्ट सम्बन्ध रखती हैं। अतः इस क्षेत्र के शैलों में उपस्थित प्रवाही संरचनाओं एवं सन्धियों का विशेष महत्त्व है।

प्राथमिक विभंग पद्धति द्रवीभूत-शैलों के संपीडनावस्था में विभंजन--बल क्रियाओं द्वारा उत्पन्न होती हैं। यह ऐसे तनन-प्रतिबल के कारण निर्मित होती हैं जिनकी उत्पत्ति शीतल होने के फलस्वरूप हुए संकुचन पर आधारित है। इस क्षेत्र की कुछ सन्धियाँ संपीडनोपरान्त विभिन्न प्रकार के विवर्त्तनिक प्रक्रियाओं द्वारा भी उत्पन्न हुई हैं जो कि द्वितीयक विभंग पद्धति में वर्गीकृत हैं। इस क्षेत्र के प्राथमिक विभंग-पद्धति में निम्नलिखित प्रकार की सन्धियों का अध्ययन किया गया है -

(क) **क्रॉस सन्धियाँ** (Cross Joints) : पर्वत गिरनार के इस भाग में क्रॉस सन्धियाँ मुख्यतः डाइयोराइड, ग्रैब्रोइक एवं ग्रैनोफायर शैलों में उपस्थित हैं जो स्पष्ट प्रवाही-स्तरों से लम्बवत् सम्बन्ध प्रदर्शित करती हैं। अस्पष्ट प्रवाही संरचनाओं से लम्बवत् सम्बन्ध रखनेवाली सन्धियों को क्रॉस-सन्धि की श्रेणी में वर्गीकृत नहीं किया जा सकता है बल्कि उन्हें ऊर्ध्वाधर (उदग्र) सन्धि की श्रेणी प्रदान की जा सकती है जो बेसाल्ट, ग्रैनोफायर एवं ग्रैब्रो में व्यापक है (भौमिकीय मानचित्र देखें)। वर्त्तमान क्षेत्र में क्रॉस सन्धियाँ 70-85° नति केन्द्र भाग से बाहर की ओर दिखलाती हैं। ये संपीडित द्रवीभूत-शैलों के अधिकतम संपीडन वाली दिशा में उत्पन्न होती हैं क्योंकि द्रवीभूत-शैलों के संपीडनोपरान्त, प्रवाही प्रक्रियाएँ प्रायः बन्द हो जाती हैं तथा विभंजन क्रियाएँ प्रभावशाली होने लगती हैं। इस क्षेत्र के हेडम्बा-फूला (चित्र 2) का अवलोकन कर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि उसकी उत्पत्ति के समय द्रवीभूत-शैलों के संपीडनावस्था में या संपीडन के तुरन्त बाद, सर्वप्रथम तनन-बल या विभंजन क्रियाओं द्वारा उसमें क्रॉस सन्धि या उदग्र सन्धि की उत्पत्ति हुई होगी तथा उसके बाद अपक्षय या विदारण प्रक्रियाएँ उसमें विवृत दरारें उत्पन्न कर सन्धि के दोनों तलों को एक दूसरे से अलग करने में सहायक सिद्ध हुई होंगी। लेकिन इनका प्रभाव बहुत गहराई तक न पहुँचने के कारण उसमें स्थान भ्रंशन या स्थान परिवर्तन की प्रक्रियाएं नहीं हुई हैं। सम्भवतः सन्धि के दोनों तलों का एक दूसरे से अलग होकर झूले जैसी रचना उत्पन्न करने के कारण ही इस पहाड़ी का नाम हेडम्बा-झूला रखा गया है।

(ख) **अनुदैर्घ्य सन्धियाँ** (Longitudinal Joints) : पर्वत गिरनार के जिन आग्नेय शैलों में प्रवाही संरचनाएँ उपस्थित हैं उन्हीं में अनुदैर्घ्य सन्धियाँ अधिकांशतः दृष्टिगोचर हैं। इनका नतिलम्ब प्रवाह-स्तर की दिशा के समान्तर है जो प्रवाह स्तर की दिशा परिवर्त्तन के साथ परिवर्तित नजर आता है।



चित्र 3



चित्र 4

भित्तियों एवं स्फटिक शिराओं की उपस्थिति यह प्रमाणित करती है कि ये सन्धियाँ प्रारम्भिक अवस्था में ही उत्पन्न हुई हैं। वाल्क[4] के अनुसार "अनुदैर्ध्य सन्धियाँ उस समय उत्पन्न होती हैं जब चादर-सदृश्य राशियाँ पुनः अन्तः-क्षेपित होती हैं जिससे नये संपीडित गुम्बदाकार छत को ऊपर की ओर फैलने को बाध्य किया जाता है जिसके परिणामस्वरूप बहुसंख्यक विभंग पैदा होते हैं जिनमें अधिकतर प्रवाह स्तर समानान्तर नतिलम्बित होते हैं।" अतः प्रवाही-स्तर एवं इनमें प्रगाढ़ सम्बन्ध है।

(ग) **तिर्यक संधियाँ** (Oblique Joints) : प्रस्तुत अध्ययन-क्षेत्र में तिर्यक सन्धियाँ ग्रेनोफायर, डायोराइट एवं बेसाल्ट में उपस्थित हैं तथा श्री मथुरेश्वर महादेव मन्दिर, सीजरवाड़ी, बबेरियोथोथ आदि पर्वतों के आस-पास के शैलों में दृष्टिगत हैं। इस क्षेत्र में इनकी नति 45-60° है (चित्र 3 तथा 4)। चित्र 3 सिजरवड़ी पर्वत के पास ली गई है जो ट्रैप-बेसाल्ट में तिर्यक सन्धि दिखलाती है तथा चित्र 4 में तिर्यक सन्धियों के कारण बेसाल्ट में आयताकार सांचा दिखाई दे रहा है। बाल्क[4] के अनुसार "तिर्यक सन्धियाँ मुख्यतः अपरूपण तल हैं जो क्रॉस सन्धियों पर प्रभावी होना चाहती हैं बशर्ते कि शैल-राशि को अगल-बगल फिसलने से अवरुद्ध किया जाय।" अतः तिर्यक सन्धियाँ शैलों की नति एवं उससे नतिलम्ब के बीच नतिलम्बित होती हैं तथा प्रवाह-स्तर की दिशा से हमेशा कुछ कोण प्रदर्शित करती हैं।

(घ) **प्राथमिक समतलीय सन्धियाँ** (Primary Flat Lying Joints) : प्राथमिक समतलीय सन्धियाँ वर्त्तमान अध्ययन-क्षेत्र के विनीत कोणीय समतलीय प्रवाही संरचनाओं वाले शैलों में उपस्थित हैं तथा ये एक दूसरे से कम अन्तराल पर तथा प्रवाही-स्तर के समान्तर अवस्थित हैं। ये शैलों में अन्तर्वेधी-राशि के विस्तार, उसके घनफल में परिवर्त्तन, दबाव में अन्तर आदि कारणों से उत्पन्न होती हैं तथा इस क्षेत्र के चादर-सदृश्य अन्तर्वेधनों से इनकी उत्पत्ति हुई है।

(2) द्वितीयक संरचनाएँ

द्वितीयक संरचनाओं में मुख्यतः द्वितीयक विभंग पद्धति (द्वितीयक सन्धियाँ) एवं भ्रंश आती हैं जो द्रवीभूत-शैलों के संपीडन के उपरान्त बलकृत कारणों या विवर्तनिक प्रक्रियाओं द्वारा उत्पन्न हुई हैं। प्रस्तुत अध्ययन-क्षेत्र के आग्नेय शैलों में किसी-किसी स्थान पर द्वितीयक संरचनाएं इतनी व्यापक एवं जटिल हैं कि उनको एक निश्चित रूप देना कठिन है। कहीं-कहीं बेसाल्ट में अन्तर्वेधी-बहिर्वेधी या विभंजन प्रक्रियाओं के प्रभाव से बहुत सूच्याकार केन्द्रमुखी या केन्द्रविमुखी सन्धियाँ पैदा हो गयी हैं जो जटिल रूप में व्यवस्थित हैं। ग्रेनोफायर में द्वितीयक तिर्यक सन्धियाँ विवर्त्तनिक क्रियाओं के प्रभाव से केन्द्रमुखी नति (60°) प्रदर्शित करती हैं। कुछ विवृत दरारें विवर्त्तनिक क्रियाओं के प्रभाव से सामान्य भ्रंश में बदल गई हैं जिसके परिणामस्वरूप सम्भवतः गिरनार का मध्य भाग अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में सफल हो पाया है।

परिणाम तथा विवेचना

पर्वत गिरनार के दक्षिण-पूर्वीय भाग में उपस्थित बेसाल्ट का नियमित एवं समतल विन्यास तथा ज्वालामुखी-ग्रीवा का कहीं दृष्टिगोचर न होना यह प्रमाणित करता है कि स्थानीय शैलों की उत्पत्ति स्थानीय ज्वालामुखी के उद्भेदन द्वारा नहीं हुई है बल्कि ये डिकैन ट्रैप प्रवाह का एक महत्वपूर्ण अंश हैं। कुछ भू-वैज्ञानिकों के मतानुसार गिरनार कम्पलेक्स की आकृति छत्रक-शैल जैसी है मगर इस अवस्था में

प्रवाही स्तर को छत्रक-शैल की सीमा के समान्तर तथा सन्धियाँ पंखे की आकृति में सजी होनी चाहिए लेकिन इस क्षेत्र में उपर्युक्त तथ्यों की अनुपस्थिति के कारण इसे छत्रक-शैल की आकृति का नहीं कहा जा सकता है। इस क्षेत्र में उपस्थिति संरचनाओं के अध्ययन एवं शैलों की नति द्वारा यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि गिरनार पर्वत का स्थानीय शैल (बेसाल्ट) समय-समय पर विभिन्न संघटन वाले द्रवीभूत-शैलों (मैग्मा) के अन्तर्वेधन से प्रभावित हुआ है जिसके परिणामस्वरूप यहाँ विभिन्न प्रकार की संरचनाएँ विकसित हुई हैं तथा शंकु चादर के रूप में इसका अन्तःक्षेपण हुआ है।

वर्त्तमान-क्षेत्र के स्थानीय शैलों में अन्तर्वेधन के प्रथम चरण में अल्पसिलिक द्रवीभूत-शैलों (ग्रैब्रोइक स्वभाव वाले) का अन्तर्वेधन हुआ है तथा इस क्रिया के दौरान मैग्मा-प्रवाह की गति (ऊपर की ओर) स्थानीय शैलों द्वारा अवरुद्ध की गई। परिणामस्वरूप ऊपर की ओर लगने वाले दबावों के कारण स्थानीय शैलों में बहुत सूच्याकार एवं केन्द्रमुखी विभंग उत्पन्न हो गये जिनमें द्रवीभूत-शैलों का शंकुचादर के रूप में अन्तर्वेधन हुआ। इन विभंगों में से कुछ भ्रंश में परिणत हो गये तथा उनकी शीर्ष–भित्ति ऊपर की ओर चली गई जिससे पर्वत गिरनार का केन्द्रीय भाग अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने में सफल हो सका।

अन्तर्वेधन के द्वितीय चरण में अधिसिलिक मैग्मा के परिधीय पर्वतों में अन्तर्वेधन के कारण ग्रेनो-फायर एवं उससे सम्बन्धित शैलों की उत्पत्ति हुई है। कुछ भू-वैज्ञानिकों के मतानुसार इन शैलों का अन्तर्वेधन वलय-भित्ति की आकृति में हुआ है। परन्तु इस परिस्थिति में शैलों की नति केन्द्रविमुखी होनी चाहिए लेकिन प्रस्तुत क्षेत्र में ग्रेनोफायरीक शैलों की नति 15-18° केन्द्रमुखी है जो कि वृहत्त शंकु-चादर की संरचना का पक्ष प्रस्तुत करती है। साथ ही साथ ग्रेनोफायर की संरचनात्मक विशेषतायें जैसे––मूल-थक्कों एवं अपराश्मों की रेखीय व्यवस्था सन्धियों की अवस्था आदि, के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि अन्तर्वेधन के समय अधिसिलिक मैग्मा का बाहर की ओर अधिक प्रसार हुआ है तथा वृहत शंकु-चादर के रूप में इसका अन्तःक्षेपण हुआ है। इन शैलों में उपस्थित तिर्यक सन्धियाँ द्वितीयक संरचनाएँ हैं तथा उनको नति (60°) विवर्तनिक प्रक्रियाओं से प्रभावित होने के कारण बहिर्मुखी हो गयी है।

उपर्युक्त अन्तर्वेधन की क्रियाओं के बीच-बीच में स्थानीय शैलों में बहुत लघु-अन्तर्वेधन की भी क्रियाएँ हुई हैं जो इनसे अनुस्तरी या सम्बन्ध प्रदर्शित करती हैं, तथा जिनसे अन्य प्रकार के शैल-जनन में सहायता मिली है।

निर्देश

1. कृष्णन, एम० एस०, **जियोलोजी आफ इन्डिया एण्ड बर्मा**, 1968
2. भिंगरन, ए० जी०, **शैलिकी के सिद्धान्त**, 1972, 19-204
3. तिवारी, अखिलेश्वर, **एम० एस-सी० थीसिस**, भौमिकी विभाग, काशी हिन्दू वि० वि०, 1978
4. बाल्क, रॉबर्ट, **स्ट्रक्चरल विहैवियर आफ इगनियस राक्स**, 1948
5. राव, एस० सुब्बा, **दी जियो० आफ इग० क० आफ गिरनार हिल्स**, 1964, इन्ट० कॉ० रिपो०, 22वाँ से० इण्डिया

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।
2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें।
8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।
9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।
10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

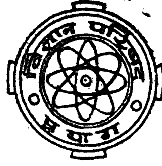
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc



संशोधित मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates
Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 £ *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
82229

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\, g(y)\, dy. \tag{2·2}$$

(1·1) में $f(x)$ का मान रखने और दिए हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध होने के कारण समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\phi(p) = p^{\rho-1} \int_0^\infty g(y)\, dy \int_0^\infty e^{-xy}\, x^{\rho-1}\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^{\sigma} \begin{matrix} (a_l;\, \alpha_l) \\ (b_o,\beta_o),\, (b_q,\, \beta_q) \end{matrix}\right]$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'} \left| \begin{matrix} (A_L, a'_L) \\ (B_o,\, \beta'_o),\, (B_Q,\, \beta'_Q) \end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^{\mu} \left| \begin{matrix} (c_u,\, \gamma_u) \\ (d_v,\, \delta_v) \end{matrix}\right.\right] dx. \tag{2·3}$$

अब प्रथम H-फलन को [6 p. 6] के द्वारा प्रसारित करने पर

$$H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[ax^{\sigma} \left| \begin{matrix} (a_l,\, \alpha_l) \\ (b_o,\, \beta_o),\, (b_q,\, \beta_q) \end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{1}{\beta_0} \sum_{r=0}^{r} \frac{(-1)^r \prod_{j=1}^{m} \surd((b_j - \beta_j \rho_r)) \prod_{j=1}^{n} \surd((1 - a_j + \alpha_j \rho_r))}{r! \prod_{j=m+1}^{q} \surd((1 - b_j + \beta_j \rho_r)) \prod_{j=n+1}^{l} \surd((a_j - \alpha_j \rho_r))}\, a^{\rho_r} x^{\sigma \rho_r}, \tag{2·4}$$

जहाँ $\rho_r = \frac{(b_0 + r)}{\beta_0}$; बशर्ते कि $(\beta_0) > 0$, $\beta < R(b_0/\beta_0) < \delta$, $R(b_j - \beta_j \rho_r)$ $(j-1, 2, ..., m;\ r=0, 1, 2, ...)$ शून्य अथवा ऋणात्मक पूर्णांक न हो, $|\arg a| < \frac{1}{2}\lambda\pi (\lambda > 0)$ तथा $A_1 > 0$, जहाँ

$$\delta \equiv \min R(b_i/\beta_i)(i=0, 1, 2, ..., q),\ \beta' \equiv \max R\left(\frac{a_i - 1}{\alpha_i}\right)(i=1, 2, ..., l),$$

$$\lambda \equiv \sum_1^n \alpha_j - \sum_{n+1}^{l} \alpha_j + \sum_1^m \beta_j - \sum_{m+1}^{q} \beta_j,\ A_1 \equiv \sum_1^q \beta_j - \sum_1^l \alpha_j;$$

तथा $e^{-xy}\, xy$ के घातों में तथा पदशः समाकलित करने पर, जो कि वैध है तथा ज्ञात फल[4] की सहायता से हमें प्रमेय प्राप्त होता है।

उदाहरण 1:

माना $g(y) = e^{-by}\ (b > 0)$ तो

$$\int_0^\infty y^{r'}\, g(y)\, dy = \frac{r'!}{b^{r'} + 1}$$